Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Bei den leuchtkräftigsten Objekten im Universum mit Leuchtkräften bis zu einigen 10^{14} Sonnenleuchtkräften bzw. $10^{40}\,$W (Unsöld 1991) handelt es sich um aktive Galaxienkerne (kurz AGN), d. h. um die Zentralregionen ansonsten „normaler“ Galaxien. Ihre Leuchtkraft muß dabei kleiner als die sogenannte Eddington-Leuchtkraft sein, für die ein Gleichgewicht zwischen dem Strahlungsdruck und der Gravitationskraft pro Fläche herrscht. Daher läßt sich als untere Grenze für ihre Masse größenordnungsmäßig ein Wert von 10^8 bis 10^9 Sonnenmassen bzw. 10^{38} bis 10^{39} kg angeben (Peterson 1997). Andererseits läßt sich ihre Ausdehnung mittels der Variabilität der Leuchtkraft abschätzen, da für inkohärente Strahlung die Lichtlaufdauer in einer Quelle die Variabilitätszeitskala nicht übersteigen darf, sofern keine relativistische Expansion vorliegt. Zusammen mit Untersuchungen der Ausdehnung des optischen Emissionsgebietes ergibt sich hieraus eine Massendichte, die sich am plausibelsten mit der Existenz eines massiven schwarzen Loches erklären läßt (Frank 1992). Die für die Leuchtkraft erforderliche Energie kann dann aus der Gravitationsenergie akkretierender Materie gewonnen werden. (Bei rotierenden schwarzen Löchern kann über den sogenannten Blandford-Znajek Prozeß auch die Rotationsenergie des schwarzen Loches ausgenutzt werden (Douglas 1986).)
Im Rahmen der vereinheitlichten Modelle für AGN wird, wie in Abbildung (1.1) gezeigt, davon ausgegangen, daß sich die Materie infolge der Drehimpulserhaltung in einer Akkretionsscheibe sammelt. Die von der Scheibe und ihrer Umgebung, der sogenannten Broad-Line Region, emittierten Spektrallinien sind aufgrund der hohen Geschwindigkeiten und dem damit verbundenen Dopplereffekt sehr breit. Die Broad-Line Region ist von einem Staub- und Gas-Torus umgeben, der die Akkretionsscheibe speist und einen Durchmesser von etwa 100 bis 1000 pc aufweist.[1] Außerhalb dieses Torus befindet sich noch die Narrow-Line Region, in der aufgrund der geringeren Geschwindigkeiten schmale Spektrallinien entstehen. Verläuft nun die Sichtlinie eines Beobachters zum schwarzen Loch durch den Torus, werden die breiten Spektrallinien infolge der großen optischen Tiefe absorbiert, so daß nur ein Spektrum mit schmalen Linien verbleibt. Anderenfalls erhält man dagegen sowohl schmale als auch breite Spektrallinien (Woltjer 1990, Weigert 1996, Peterson 1997). Bei radioleisen Galaxien wird noch ein Ionisationskegel beobachtet, den man dadurch erklären kann, daß interstellare Gaswolken der Extended Narrow-Line Region (im Abstand von einigen Kiloparsek zum Zentrum) durch die Strahlung der Broad-Line Region ionisiert werden (Peterson 1997). Geometrisch entspricht er den nicht durch den Torus verlaufenden Geraden. Man kann insgesamt also im Rahmen vereinheitlichter Modelle verschiedene phänomenologische Erscheinungen aktiver Galaxienkerne auf *ein* Modell zurückführen.

[1] 1 Parsek (pc) entspricht $3{,}09 \cdot 10^{16}$ m.

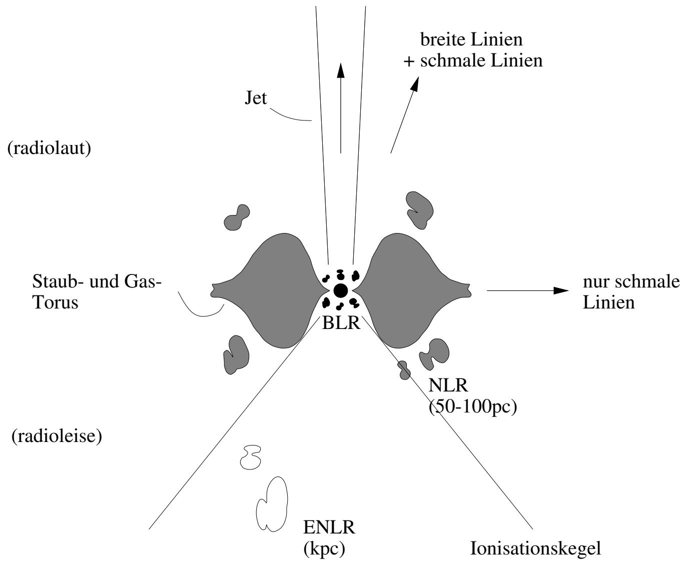

Abbildung 1.1: Schematischer, nicht maßstabsgerechter Querschnitt durch einen AGN gemäß der vereinheitlichten Modelle (nach Peterson 1997). Die in der Broad-Line Region (BLR) emittierten breiten Spektrallinien werden absorbiert, wenn die Sichtlinie durch den Staub- und Gas-Torus verläuft. Die schmalen Linien der Narrow-Line Region (NLR) sind dagegen stets sichtbar. Bei radiolauten AGN (obere Bildhälfte) treten zwei in entgegengesetzte Richtung laufende relativistische Jets auf. Bei radioleisen AGN (untere Bildhälfte) kann noch eine Extended Narrow-Line Region (ENLR) im Ionisationskegel vorliegen.

Bei radiolauten AGN kommt es noch zur Ausbildung von relativistischen Jets, die eine Länge von bis zu einigen Megaparsek aufweisen können und im Radiobereich Synchrotronstrahlung produzieren. Die Entstehung dieser Jets ist nicht genau geklärt. Denkbar ist aber beispielsweise, daß ein Jet einen $e^{\pm}$-Paar-Wind darstellt, ähnlich dem eines Pulsars infolge des Kurzschlusses in der Magnetosphäre. Da die Jetlänge in vielen Fällen das Produkt aus der typischen Zeitskala für Synchrotronstrahlung und der Lichtgeschwindigkeit bei weitem übertrifft, ist klar, daß innerhalb des Jets eine Teilchenbeschleunigung erfolgen muß (Frank 1992, Begelman 1984, vgl. auch Hargrave 1974).
Bezüglich solcher relativistischer Jets stellt sich die Frage, wie ihre Kollimation erfolgt. Als eine Möglichkeit bietet sich dabei die Kollimation durch ein Magnetfeld an (Rees 1981; bezüglich anderer Möglichkeiten sei auf Begelman (1984) verwiesen). In diesem Fall ist die Existenz eines toroidalen Feldes im Außenraum des Jets zu fordern, so daß sein magnetischer Druck das Auseinanderlaufen des Jetplasmas verhindert. In Lynden-Bell (1996) wird vorgeschlagen, daß das benötigte Magnetfeld entstehen könnte, wenn die Akkretionsscheibe in einem Medium liegt, dessen Druck ein Auseinanderlaufen der Feldlinien des Magnetfeldes der Akkretionsscheibe verhindert.
Blickt ein Beobachter direkt auf einen Jet, erscheint der zugehörige AGN als sogenannter Blazar. In diesem Fall beobachtet man vom Radio- bis zum Röntgenbereich ein kontinuierliches Spektrum mit einem Maximum im Infrarot- bis Röntgenbereich. Der Frequenzumfang und der hohe gemessene Polarisationsgrad weisen darauf hin, daß dieses Kontinuum Synchrotronstrahlung darstellt (Ulrich 1997). Oberhalb des Röntgenbereiches nimmt die spektrale Leistung wieder zu. Die Spektren von Blazaren können bis in den TeV-Bereich reichen (vgl. Bregman 1990 und Makino 1987). Als eine weitere entscheidende Eigenschaft von Blazaren ist ihre Va-

riabilität in verschiedenen Frequenzbereichen zu nennen, die sich auf Zeitskalen von Jahren bis Stunden erstreckt (Peterson 1997). Eine solche Variabilität läßt sich mittels im Jet nach außen laufender Schockwellen erklären (Marscher 1985, Romanova 1997). An diesen kommt es zur Teilchenbeschleunigung, die zu einer Zeitabhängigkeit des beobachteten Spektrums führt. Die Zeitabhängigkeit (und auch die Teilchenbeschleunigung) hängt hierbei von der im Jet vorliegenden Magnetfeldstärke ab.

Zur Beantwortung der Frage, ob eine magnetische Kollimation und die eben angeführte Erklärung für die Variabilität von Blazaren möglich sind, ist es somit erforderlich, die Magnetfeldstärke im Jet zu kennen. Dementsprechend ist es notwendig, eine (oder mehrere) Methode(n) zu ihrer Bestimmung anzugeben. Hierzu sei zunächst die Methode der Energieminimierung genannt. Aus der Leuchtkraft einer Quelle kann man die Energie der emittierenden Elektronen[2], abschätzen. Addiert man hierzu die Energie der Protonen und schweren Kerne und die des Magnetfeldes, erhält man die Gesamtenergie der Quelle. Bezüglich der Energie der Protonen und schweren Kerne muß dabei eine Modellannahme einfließen, da die beobachtete Strahlung praktisch ausschließlich von den Elektronen erzeugt wird und somit keinen Rückschluß auf die Protonen und schweren Kerne erlaubt. Fordert man nun eine minimale Gesamtenergie, ergibt sich ein ausgezeichneter Wert für die Magnetfeldstärke (Frank 1992). Als zweite, für diese Arbeit relevante Methode sei die Bestimmung aus dem Abknicken des Synchrotronspektrums zu niedrigen Frequenzen hin angeführt. Diese beruht darauf, daß das von einem Plasma emittierte Spektrum beim Übergang vom optisch dicken zum optisch dünnen (Frequenz-)Bereich einen Knick aufweist. Kennt man die Ausdehnung der Quelle, kann man somit den Absorptionskoeffizienten bei der Turnover-Frequenz, d. h. der Frequenz des Knickes bestimmen. Aus der Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Magnetfeldstärke ergibt sich dann deren Wert. Das Problem hierbei besteht darin, daß der Absorptionskoeffizient von der Form des Elektronenspektrums abhängt. Dieses kann jedoch nur im optisch dünnen Bereich aus dem beobachteten Photonenspektrum ermittelt werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Bestimmung des Elektronenspektrums, das für die optisch dicke Synchrotronstrahlung verantwortlich ist, um dessen Einfluß auf die Bestimmung der Magnetfeldstärke angeben zu können. Dazu werden zunächst in Kapitel 2 die Grundlagen der klassischen Elektrodynamik und der Synchrotronstrahlung diskutiert. Da sich die Synchrotronstrahlung infolge der Ablenkung von Ladungen im Magnetfeld formal als spontane Emission auffassen läßt, stellt sich im Anschluß hieran die Frage nach einer entsprechenden induzierten Emission und Absorption. Daher wird in Kapitel 3 eine quantenelektrodynamische Diskussion der Synchrotronstrahlung durchgeführt. Sie führt zum Ergebnis, daß eine Beschreibung mit Hilfe der Einsteinschen A- und B-Koeffizienten möglich ist. Dies wird in Kapitel 4 ausgenutzt, um die gekoppelten kinetischen Gleichungen für das Elektronen- und das Photonenspektrum herzuleiten und einfache Lösungen für sie anzugeben. Kapitel 5 widmet sich der Diskussion der Grundlagen der sogenannten Fermibeschleunigung. In Kapitel 6 schließlich werden zunächst die kinetischen Gleichungen aus Kapitel 4 um die Fermibeschleunigung erweitert. Es folgt die Herleitung der Lösung für die Elektronenverteilung infolge von Synchrotronstrahlung und Teilchenbeschleunigung im optisch dünnen Fall für eine beliebige Elektroneninjektion. Die Arbeit schließt mit der Erörterung der Frage, inwieweit sich die Berücksichtigung der Synchrotronselbstabsorption bei der Bestimmung von Magnetfeldstärken aus dem Knick eines Synchrotronspektrums auswirkt.

[2]Die in dieser Arbeit getroffenen Feststellungen gelten in der Regel gleichermaßen für Elektronen und Positronen. Insofern bleiben die Aussagen für Elektronenspektren allgemeiner auch für Elektron-Positron-Spektren gültig.

Kapitel 2

Synchrotronstrahlung

2.1 Strahlung beschleunigter Ladungen

Bevor die Synchrotronstrahlung als Beispiel der Emission beschleunigter Ladungen diskutiert wird, sei im folgenden zunächst kurz an die Grundlagen aus der Elektrodynamik erinnert. Die Darstellung folgt im wesentlichen Rybicki (1979). Ausgangspunkt sind dabei die Maxwellschen Gleichungen

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{2.4}$$

Hier wie auch im folgenden werden die elektromagnetischen Größen in cgs-Einheiten angegeben. Wie allgemein üblich, bezeichnen ρ die Ladungs- und $\vec{j}$ die Stromdichte. Das elektrische Feld $\vec{E}$ und das Magnetfeld $\vec{B}$ lassen sich mittels eines skalaren Potentials ϕ ud eines Vektorpotentials $\vec{A}$ durch

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2.5}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2.6}$$

ausdrücken, wobei man aus den Maxwellschen Gleichungen für die beiden Potentiale die allgemeine Lösung

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_{R^3} \frac{\rho(\vec{r'}, t_{\mathrm{ret}})}{|\vec{r'} - \vec{r}|} d^3x' \tag{2.7}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\int_{R^3} \frac{\vec{j}(\vec{r'}, t_{\mathrm{ret}})}{|\vec{r'} - \vec{r}|} d^3x' \tag{2.8}$$

mit der retardierten Zeit $t_{\rm ret} = t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r'}|$ erhält. Es wird nun zunächst der Fall von N Punktladungen betrachtet. Die Ladungs- und Stromdichte seien also von der Form

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \tag{2.9}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\vec{r}}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \tag{2.10}$$

Setzt man Gleichungen (2.9) und (2.10) in Gleichung (2.7) bzw. (2.8) ein, so ergeben sich nach einiger Umformung die Liénard-Wiechart Potentiale:

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{q_i}{\kappa_i R_i}\right]_i (\vec{r}, t) \tag{2.11}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{q_i \dot{\vec{r}}_i}{c \kappa_i R_i}\right]_i (\vec{r}, t). \tag{2.12}$$

Hierbei bezeichnet R_i den Betrag von $\vec{R}_i \equiv \vec{r} - \vec{r}_i$. κ_i wird dagegen als Abkürzung für $\kappa_i = 1 - \frac{1}{c}\vec{n}(t)\dot{\vec{r}}_i(t)$ mit $\vec{n} = \vec{R}/R$ verwendet. Die eckigen Klammern um die Integranden geben an, daß jeweils die retardierte Funktion zu betrachten ist; d. h. es gilt für eine beliebige Funktion f

$$[f]_i(\vec{r}, t) \equiv f(\vec{r}_i(t_{\rm ret,i}), t_{\rm ret,i}).$$

Die retardierte Zeit $t_{\rm ret,i}$ bezüglich des i-ten Teilchens und der zugehörige Ort $\vec{r}_i(t_{\rm ret,i})$ sind eindeutig durch die Bedingung

$$R_i(t_{\rm ret,i}) = c(t - t_{\rm ret,i}) \tag{2.13}$$

festgelegt. Für eine (massebehaftete) Ladung gilt ja $\dot{R} < c$ und somit für (o. E. d. A.) $t > t_{\rm ret}$

$$|R(t) - R(t_{\rm ret})| = \left|\int_{t_{\rm ret}}^{t} \dot{R}(t')dt'\right| \leq \int_{t_{\rm ret}}^{t} |\dot{R}(t')|dt' < \int_{t_{\rm ret}}^{t} c\,dt' = c(t - t_{\rm ret}) \tag{2.14}$$

Würde nun ein $\tilde{t}$ mit $t_{\rm ret} < \tilde{t} < t$ wie $t_{\rm ret}$ die Bedingung (2.13) erfüllen, so wäre $|R(\tilde{t}) - R(t_{\rm ret})| = |c(t-\tilde{t}) - c(t-t_{\rm ret})| = c(\tilde{t} - t_{\rm ret})$, im Widerspruch zu Gleichung (2.14). Somit ist die Eindeutigkeit der retardierten Zeit bewiesen.
Indem man die Liénard-Wiechart Potentiale in die Gleichungen (2.5) bzw. (2.6) einsetzt, erhält man die entsprechenden elektromagnetischen Felder. Die hierzu erforderliche Rechnung wird beispielsweise in Jackson (1962) explizit ausgeführt. Sie ergibt mit $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ und $\vec{\beta} \equiv \vec{v}/c$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ q_i \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2}\right]_i + \frac{q_i}{c}\left[\frac{\vec{n}}{\kappa^3 R} \times \{(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}\right]_i \right\} \tag{2.15}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} [\vec{n}]_i \times \vec{E}_i. \tag{2.16}$$

Wie bislang bezeichnen die eckigen Klammern retardierte Größen; $\vec{E}_i$ ist das elektrische Feld der i-ten Ladung. Die Felder lassen sich offenbar (für jede einzelne Ladung) aus einem beschleunigungsunabhängigen Geschwindigkeits- und einem von der Beschleunigung abhängigen

Strahlungsfeld zusammengesetzt denken. Wie man es aus der Elektostatik (Coulomb-Gesetz!) erwarten sollte, fällt das Geschwindigkeitsfeld für kleine Geschwindigkeiten im wesentlichen antiproportional zum Abstandsquadrat ab. Der Abfall des Strahlungsfeldes erfolgt dagegen antiproportional zum Abstand; es ist mit der emittierten elektromagnetischen Welle zu identifizieren.
Man beachte ferner, daß beim Strahlungsfeld jeder Ladung $\vec{E}_{\mathrm{rad}}$, $\vec{B}_{\mathrm{rad}}$ und der retardierte Abstandsnormalenvektor $[\vec{n}]$ in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges Orthogonalsystem bilden und somit der Poynting-Vektor die selbe Richtung und Orientierung wie $[\vec{n}]$ besitzt. Bei der Beschleunigung einer Ladung wird also eine elektromagnetische Welle emittiert, die sich radial von ihrem Ursprungsort fortbewegt.
Zudem ist noch anzumerken, daß die Felder beschleunigter Ladungen nur von der jeweiligen Beschleunigung, nicht aber von dem bereits vorhandenen $\vec{E}$- bzw. $\vec{B}$-Feld abhängen. (Andererseits sind die vorliegenden Felder natürlich von entscheidender Bedeutung für die Beschleunigung.)
Da sich die Gesamtfelder als Superposition der Felder der einzelnen Ladungen ergeben, genügt es im folgenden, eine einzige Ladung q zu betrachten. Dann kan man zu jedem Zeitpunkt t ein Bezugssystem KS angeben, in dem zum betrachteten Zeitpunkt $\vec{\beta}$ momentan verschwindet. Bezüglich dieses Systems ist das Betragsquadrat des bei t emittierten Strahlungsfeldes von der Form

$$|\vec{B}_{\mathrm{rad}}|^2 = |\vec{E}_{\mathrm{rad}}|^2 = \frac{q^2}{c^2}\frac{1}{R^2}|\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2\vartheta, \tag{2.17}$$

wobei ϑ den Winkel zwischen $\dot{\vec{\beta}}$ und $\vec{n}$ darstellt. Integriert man den zugehörigen Energiefluß $\frac{c}{8\pi}(|\vec{E}_{\mathrm{rad}}|^2 + |\vec{B}_{\mathrm{rad}}|^2)$ über die Kugelfläche mit Radius R, ergibt sich für die von der Ladung zum Zeitpunkt t abgestrahlte Leistung P die Larmorsche Formel:

$$P = \frac{2q^2\ddot{\vec{r}}^{\,2}}{3c^3} \qquad (\dot{\vec{r}} = \vec{0}). \tag{2.18}$$

$\ddot{\vec{r}} \equiv \vec{a}$ bezeichnet die Geschwindigkeitsänderung pro Koordinatenzeit. Sie ist daher im Gegensatz zu Vierergeschwindigkeit und -beschleunigung kein Vierervektor. Vielmehr ergibt sich für das Transformationsverhalten der Komponenten $a_{\|}$ parallel und $a_{\perp}$ senkrecht zur Geschwindigkeit

$$a'_{\|} = \gamma^3 a_{\|} \tag{2.19}$$

$$a'_{\perp} = \gamma^2 a_{\perp}, \tag{2.20}$$

wobei $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ für den Lorentzfaktor steht. Die Verallgemeinerung von Gleichung (2.18) auf beliebige Bezugssysteme ist verblüffend einfach: Zum einen besteht das Strahlungsfeld aus Photonen, deren Energien E_{ph} (dividiert durch c) und Impulse $\vec{p}_{\mathrm{ph}}$ einen Vierervektor bilden. Damit aber sind auch die Geamtenergie E und der Gesamtimpuls p des Strahlungsfeldes Komponenten eines Vierervektors; d. h. es gilt (Goenner 1996)

$$\frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \frac{\vec{v}\vec{p}}{c}\right). \tag{2.21}$$

Man ersieht nun aber aus Gleichungen (2.15) und (2.16), daß das Strahlungsfeld für $\vec{n}$ und $-\vec{n}$ identisch ist. Demnach verschwindet im (momentanen) Ruhesystem der Ladung der Gesamtimpuls der emittierten Photonen und damit auch die Impulsänderung des Strahlungsfeldes, woraus mit Gleichung (2.21) die einfache Beziehung $dE' = \gamma dE$ folgt.
Zum anderen gilt für die Transformation einer Zeitdifferenz ganz allgemein

Größe	cgs		MKSA
Ladung	q	$\longleftrightarrow$	$\frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
elektrische Feldstärke	$\vec{E}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}\vec{E}$
magnetische Flußdichte	$\vec{B}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\vec{B}$
Ladung $\times$ magn. Flußdichte	$q\vec{B}$	$\longleftrightarrow$	$cq\vec{B}$

Tabelle 2.1: Umrechnungsvorschriften zwischen cgs- und MKSA-System.

$$dt' = \gamma(dt - \frac{\vec{v}d\vec{r}}{c^2}). \tag{2.22}$$

Im Zeitintervall dt bewegt sich die Ladung im momentanen Ruhesystem KS aber nur um $d\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}(dt)^2$ weiter, da ja ihre Anfangsgeschwindigkeit per definitionem Null ist. Für die Zeitdifferenz dt' ergibt sich damit

$$dt' = \gamma dt - \gamma\frac{\vec{v}\vec{a}}{2c^2}dt^2, \tag{2.23}$$

so daß man für $dt \longrightarrow 0$ den zweiten gegen den ersten Term vernachlässigen kann. Es gilt also die Transformationsformel $dt' = \gamma dt$. Insgesamt erhält man demnach

$$P' = \frac{dE'}{dt'} = \frac{\gamma dE}{\gamma dt} = \frac{dE}{dt} = P, \tag{2.24}$$

d. h. daß die gesamte Strahlungsleistung einer Ladung eine Lorentz-Invariante darstellt. Setzt man nun die Transformationsformeln (2.19) und (2.20) in Gleichung (2.18) ein, verwendet die Invarianz der Leistung und schreibt P statt P', so ergibt sich

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\{\gamma^2 a_\parallel^2 + a_\perp^2\}. \tag{2.25}$$

Um noch die spektrale Energieverteilung der Strahlung zu erhalten, hält man zunächst fest, daß bei einem (endlichen oder zumindestens hinreichend schnell abfallenden) Wellenzug die pro Frequenzintervall $d\omega$ durch ein Flächenelement dA hindurchtretende Energie dW durch

$$\frac{dW}{d\omega dA} = c|\tilde{\vec{E}}(\omega)|^2 \tag{2.26}$$

mit der fouriertransformierten Feldstärke

$$\tilde{\vec{E}}(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(t)e^{i\omega t}dt \tag{2.27}$$

gegeben ist, wie in Abschnitt 3.1 bewiesen wird. Man überlegt sich leicht, daß hieraus für die pro Raumwinkel emittierte spektrale Energieverteilung

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{4\pi^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}[R]\vec{E}(t)e^{i\omega t}dt\right|^2 \tag{2.28}$$

folgt. Indem man für $\vec{E}(t)$ das Strahlungsfeld aus Gleichung (2.15) einsetzt, sieht man nach einiger Rechnung, daß für Abstände R, die groß gegen den Ort $\vec{r}_0$ der Ladung sind, die Beziehung

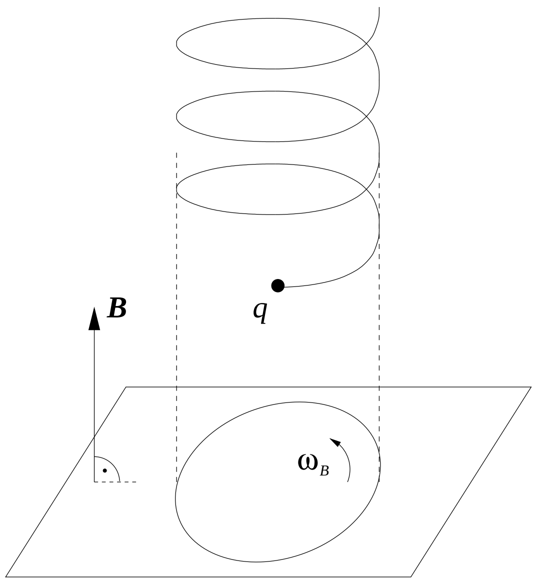

Abbildung 2.1: Gyration einer Ladung im Magnetfeld.

$$\int_{-\infty}^{\infty} [R]\vec{E}(t)e^{i\omega t}dt = \frac{q\omega}{c}\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})e^{i\omega(t' - \vec{n}\vec{r}_0(t')/c}dt' \tag{2.29}$$

erfüllt ist. Damit ergibt sich

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})e^{i\omega(t' - \vec{n}\vec{r}_0(t')/c)}dt'\right|^2. \tag{2.30}$$

Da in dieser Arbeit überwiegend das cgs-System verwendet wird, für konkrete Rechnungen jedoch das MKSA-System brauchbarer ist, sind in Tabelle (2.1) die wichtigsten Umrechnungsvorschriften zusammengefaßt. (Eine erheblich umfangreichere Auflistung findet man im Anhang von Jackson (1962).)

2.2 Ladungen im Magnetfeld

Als Beispiel für die Anwendung der oben durchgeführten allgemeinen Diskussion sei der Fall einer in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ gyrierenden Ladung q betrachtet. Hierbei bezeichne wie oben $\vec{v}$ die Geschwindigkeit, $\vec{a}$ die Beschleunigung (bezüglich der Koordinatenzeit) der Ladung und α den sogenannten Pitchwinkel, d. h. den Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{B}$. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ möge verschwinden. Dann wird die Bewegung der Ladung vollständig durch die beiden Gleichungen

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B} \tag{2.31}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = 0 \tag{2.32}$$

beschrieben. Gleichung (2.31) beruht hierbei darauf, daß die Impulsänderung der Lorentzkraft entspricht, Gleichung (2.32) darauf, daß die Lorentzkraft als zur Geschwindigkeit orthogonale

Kraft keine Leistung verrichtet und somit die kinetische Energie γmc^2 der Ladung unverändert läßt. Man sieht sofort, daß sich die beiden Gleichungen zusammenfassen lassen zur Bewegungsgleichung

$$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \tag{2.33}$$

Im folgenden seien zu $\vec{B}$ parallele (Vektor-)Komponenten mit dem Index $_\parallel$, zu $\vec{B}$ orthogonale Komponenten mit $_\perp$ bezeichnet. Identifiziert man die komplexe Zahlenebene mit der zu B orthogonalen Ebene und ihre Punkte mit Vektoren, so hat die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung die Form

$$\vec{v}_\parallel \equiv \text{const} \tag{2.34}$$

$$\vec{v}_\perp = v_\perp e^{i(\omega_B t + \phi)} \tag{2.35}$$

mit einem beliebigen Phasenfaktor ϕ und der Zyklotronfrequenz

$$\omega_B \equiv \frac{qB}{\gamma mc}. \tag{2.36}$$

Die Bahnkurve einer Ladung stellt also eine Helix, d. h. die Überlagerung einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit $v_\parallel$ parallel und einer Kreisbewegung mit der Kreisfrequenz ω_B senkrecht zu $\vec{B}$ dar, wie es die Abbildung (2.1) zeigt. Für die Beschleunigung ergibt sich aus den Gleichungen (2.34) und (2.35) unmittelbar $a_\parallel = 0$ und $a_\perp = v_\perp \omega_B$. Setzt man diese Beziehungen in die Formel (2.25) für die Strahlungsleistung einer beschleunigten Ladung ein, ergibt sich

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 a_\perp^2 = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 v_\perp^2 \omega_B^2. \tag{2.37}$$

Speziell für Elektronen und Positronen läßt sich diese Leistung mit dem klassischen Elektronenradius $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ auch schreiben als

$$P = \frac{2}{3} r_0^2 c \beta_\perp^2 \gamma^2 B^2. \tag{2.38}$$

Die Strahlungsleistung fällt mit dem Quadrat der Masse ab; bei gleicher kinetischer Energie ist also die Leistung eines Protons gegenüber der eines Elektrons bzw. Positrons zu vernachlässigen. Da das Vorhandensein einer Strahlungsleistung einen Energieverlust der strahlenden Ladung beinhaltet, steht Gleichung (2.37) strenggenommen im Widerspruch zu Gleichung (2.32) und somit insbesondere auch zu Gleichung (2.35). Die Rechtfertigung für ihre Verwendung besteht nur, wenn die Periodendauer $T = 2\pi/\omega_B$ der Gyration sehr viel kürzer als die Zeitskala $\tau \equiv \gamma mc^2/P$ der Strahlungsverluste ist:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{4\pi q^3 v_\perp^2 B \gamma^2}{3m^2 c^6} = \left.\frac{q^3 v_\perp^2 B \gamma^2}{3\epsilon_0 m^2 c^5}\right|_{\text{SI}} = 6.9 \times 10^{-12} \left(\frac{v_\perp}{c}\right)^2 \left(\frac{m}{m_e}\right)^{-2} \left(\frac{q}{e}\right)^3 \left(\frac{B}{1\,\text{T}}\right) \gamma^2 \overset{!}{\ll} 1$$

Um die Spektralverteilung der Synchrotronemission zu berechnen, setzt man die oben berechnete Geschwindigkeit $\vec{v}$ in die allgemeine Formel (2.30) ein und integriert anschließend über alle Raumwinkel. Hierzu sei die in Abbildung (2.2) eingeführte Notation verwendet, d. h. es seien $\vec{\epsilon}_\perp$ der in der momentanen Bahnebene zu $\vec{v}$ senkrechte Einheitsvektor (in Richtung des Krümmungskreisinneren) und $\vec{\epsilon}_\parallel \equiv \vec{n} \times \vec{\epsilon}_\perp$. Ferner bezeichne W die Strahlungsenergie. Anhand der Beziehung (2.29) macht man sich leicht klar, daß der Anteil $\vec{E}_\perp$ bzw. $\vec{E}_\parallel$ von $\vec{E}$ gerade dem

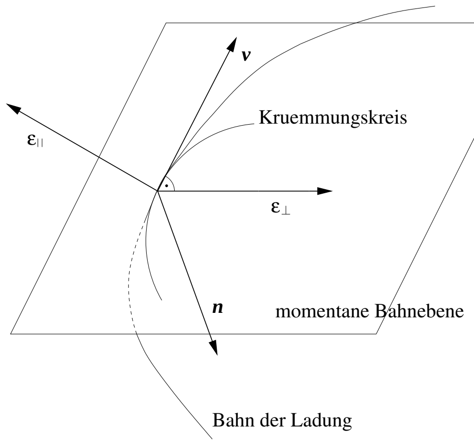

Abbildung 2.2: $\vec{\epsilon}_\perp$ und $\vec{\epsilon}_\|$. $\vec{v}$ und $\vec{\epsilon}_\perp$ spannen die momentane Bahnebene auf; $\vec{\epsilon}_\|$ ist durch $\vec{n}\times\vec{\epsilon}_\perp$ gegeben (vgl. Rybicki 1979).

Anteil $\vec{N}_\perp \equiv (\vec{(n)} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}))_\perp$ bzw. $\vec{N}_\| \equiv (\vec{(n)} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}))_\|$ von $\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})$ entspricht. Sind $\vec{\epsilon}_\perp$ und $\vec{\epsilon}_\|$ also konstant (s. u.), so entsprechen demnach die Anteile $W_\perp$ bzw. $W_\|$ von W infolge von $\vec{N}_\perp$ bzw. $\vec{N}_\|$ gerade der Energie der in Richtung $\vec{\epsilon}_\perp$ bzw. $\vec{\epsilon}_\|$ polarisierten Strahlung.
Beschränkt man sich nun auf hochrelativistische Energien, kann man zur Vereinfachung noch eine Näherung verwenden: Infolge des Dopplereffektes ist bei hochrelativistischen Teilchen der überwiegende Anteil der Strahlung in einem Kegel mit dem Öffnungswinkel $1/\gamma$ in Richtung der Geschwindigkeit konzentriert („Beaming-Effekt“). Das bedeutet aber, daß für einen bestimmten (festen) Punkt im Raum pro Gyrationsumlauf im Magnetfeld nur das Bahnstück relevant ist, für das $\vec{v}$ und $\vec{n}$ einen Winkel kleiner gleich $1/\gamma$ einschließen. Wie aus Abbildung (2.3) hervorgeht, ist diees Bahnstück sehr kurz. Damit aber darf man zum einen $\vec{\epsilon}_\perp$ und $\vec{\epsilon}_\|$ als konstant auffassen. Zum anderen kann für einen Umlauf eine (durch eine abgebrochene Reihenentwicklung erhaltene) Parabelbahn die Helixbahn ersetzen: Für das relevante Bahnstück sind Parabel und Helix praktisch identisch; für den Rest der Bahn sind sind sie zwar verschieden, tragen aber auch nichts zur Strahlung im betrachteten Punkt bei. Nutzt man diese Näherung aus und berücksichtigt man bei der Integration über alle Raumwinkel noch, daß aufgrund des Beaming-Effektes nur in einen kleinen Raumwinkelbereich überhaupt Strahlung gelangt (siehe Abbildung (2.3)), erhält man nach längerer Rechnung (Rybicki 1979, Westfold 1959)

$$\frac{dW_\perp}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2\gamma\sin\alpha}{2c}[F(x)+G(x)] \tag{2.39}$$

$$\frac{dW_\|}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2\gamma\sin\alpha}{2c}[F(x)-G(x)] \tag{2.40}$$

.

Hierbei steht x als Abkürzung für

$$x \equiv \frac{\omega}{\omega_c} \tag{2.41}$$

mit der kritischen Kreisfrequenz ω_c, die als

$$\omega_c \equiv \frac{3\gamma^2 qB\sin\alpha}{2mc} \tag{2.42}$$

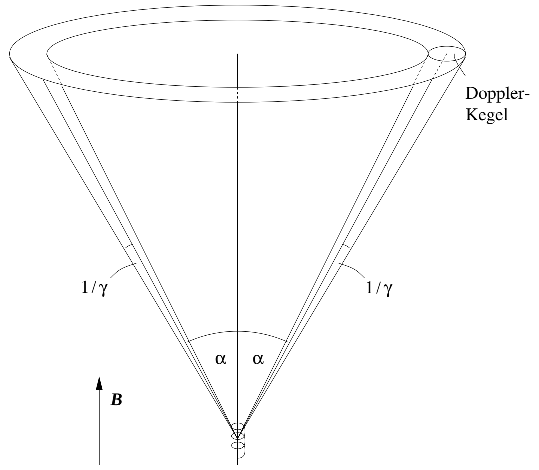

Abbildung 2.3: Dopplerkegel einer gyrierenden Ladung (nach Rybicki 1979).

definiert ist. Die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ sind gegeben durch

$$F(x) \equiv x \int_x^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi \tag{2.43}$$

$$G(x) \equiv x K_{2/3}(x), \tag{2.44}$$

wobei K die modifizierte Besselfunktion bezeichnet, deren Ordnung der jeweilige Index angibt. $F(x)$ läßt sich hierbei gut durch die Funktion $F_{\mathrm{app}}(x) = 1.8x^{0.3}e^{-x}$ approximieren (Melrose 1980, Rieger 1997). Abbildung (2.4) zeigt den Verlauf von $F(x)$ und $F_{\mathrm{app}}(x)$. Es sei noch erwähnt, daß sich das Integral über das Produkt von F und einer beliebigen Potenzfunktion x^μ mit $\mu > -\frac{4}{3}$ längs der positiven Achse mittels der Eulerschen Gammafunktion angeben läßt (Westfold 1959):

$$\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right) \qquad (\mu > -\tfrac{4}{3}). \tag{2.45}$$

Die Forderung $\mu > -\frac{4}{3}$ ergibt sich daraus, daß $F(x)$ für $x \ll 1$ proportional zu $x^{1/3}$ ist und ein Integral der Form $\int_0^b x^\nu dx$ mit einem beliebigen $b > 0$ nur für $\nu > -1$ einen endlichen Wert besitzt.

Da bislang nur ein einziger Umlauf der Ladung betrachtet wurde, ergibt sich die spektrale Leistung der beiden Polarisationsrichtungen, indem man Gleichungen (2.39) und (2.40) durch die Umlaufperiode $T = 2\pi/\omega_B$ dividiert:

$$P_\perp(\omega) = \frac{\sqrt{3}\omega_B q^2 \gamma \sin\alpha}{4\pi c}[F(x) + G(x)] \tag{2.46}$$

$$P_\parallel(\omega) = \frac{\sqrt{3}\omega_B q^2 \gamma \sin\alpha}{4\pi c}[F(x) - G(x)] \tag{2.47}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen und ersetzt gemäß Formel (2.36) die Zyklotronfrequenz, erhält man für die gesamte spektrale Strahlungsleistung die Beziehung

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin\alpha}{2\pi m c^2} F(x). \tag{2.48}$$

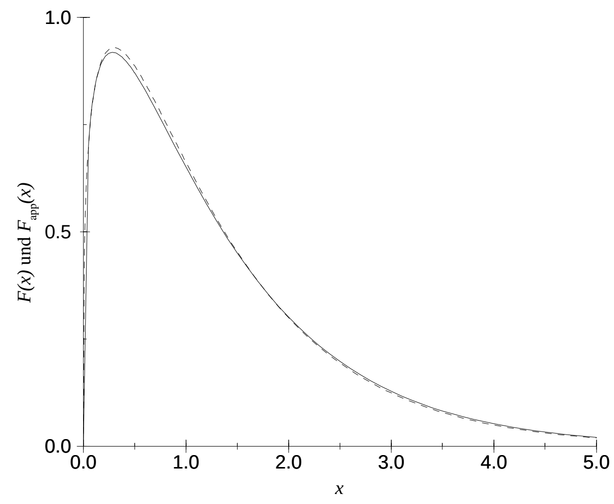

Abbildung 2.4: Die Funktionen $F(x) = x\int_x^\infty K_{5/3}(\xi)d\xi$ (durchgezogene Kurve) und $F_{\rm app}(x) = 1.8x^{0.3}e^{-x}$ (gestrichelte Kurve).

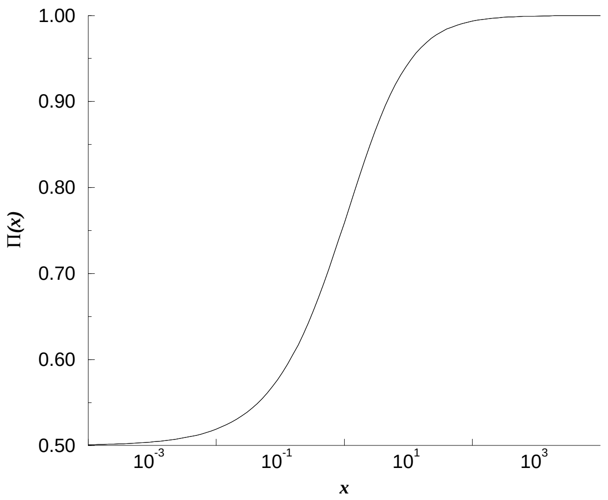

Abbildung 2.5: Polarisationsgrad der Synchrotronstrahlung.

Aus der Lage des Maximums von $F(x)$ bei $x = 0.29$ (vgl. Abbildung (2.4)) folgt also, daß das Maximum der spektralen Strahlungsleistung bei $0.29\omega_{\mathrm{c}}$ liegt.
Eine einzelne hochrelativistische Ladung führt zu einer elliptischen Polarisation der Strahlung. Bei mehreren Ladungen heben sich die elliptischen Anteile jedoch gegenseitig weg, und es verbleibt eine lineare Polarisation des Grades (Longair 1994, Rybicki 1979)

$$\Pi = \frac{P_\perp(\omega) - P_\parallel(\omega)}{P_\perp(\omega) + P_\parallel(\omega)} = \frac{G(x)}{F(x)}. \tag{2.49}$$

In Abbildung (2.5) ist der Graph des Polarisationsgrades dargestellt.

Kapitel 3

Synchrotronselbstabsorption

3.1 Monochromatische Wellen und Photonen

Die spektrale Energieverteilung eines gegebenen Wellenzuges wird naheliegenderweise als Verteilung der Energie auf die den Wellenzug bildenden monochromatischen Wellen verschiedener Frequenz definiert. Dazu jedoch ist die Kenntnis erforderlich, wann ein Wellenzug überhaupt eine monochromatische Welle darstellt. Die Forderung, daß eine monochromatische Welle eine feste Frequenz aufweist, ist offensichtlich nicht hinreichend, da es zu einer gegebenen Frequenz ja unendlich viele verschiedene Wellenformen gibt.
Hier sei als Definition vorgeschlagen, daß eine Welle genau dann monochromatische genannt wird, wenn sie beim Photoeffekt Elektronen mit genau einer kinetischen Energie freisetzt.[1] Die semiklassische Beschreibung elektromagnetischer Wellen in der Quantenmechanik liefert aber das Ergebnis, daß eine harmonische ebene Welle einer bestimmten Frequenz beim Photoeffekt Elektronen mit einer kinetischen Energie in einem engen Energieintervall freisetzt. Es ist somit (naheliegend, aber nicht exakt) gezeigt, daß es sich bei monochromatischen Wellen um harmonische ebene Wellen handelt.
Es sei nun ein Filter F gegeben, der aus einem beliebigen Wellenzug $\vec{E}(t)$ nur die monochromatischen Wellen des Kreisfrequenzbereiches von y bis $y+\Delta$ durchläßt. Nach dem eben Gesagten ist dann klar, daß die Wirkung dieses Filters darin besteht, die ursprüngliche Feldstärke

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\vec{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \tag{3.1}$$

mit der Fouriertransformierten $\tilde{\vec{E}}(\omega)$ aus Gleichung (2.27) in die durch

$$\vec{E}_{\mathrm{F}}(t) = \int_{y}^{y+\Delta} d\omega \tilde{\vec{E}}(\omega) e^{-i\omega t} + \int_{-y-\Delta}^{-y} d\omega \tilde{\vec{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \tag{3.2}$$

gegebene „gefilterte“ Feldstärke zu überführen. Für die zugehörige Fouriertransformierte ergibt sich

$$\tilde{\vec{E}}_{\mathrm{F}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left\{ \int_{y}^{y+\Delta} d\omega' \tilde{\vec{E}}(\omega') e^{-i\omega' t} + \int_{-y-\Delta}^{-y} d\omega' \tilde{\vec{E}}(\omega') e^{-i\omega' t} \right\}$$

[1] Eine naheliegendere (in diesem Zusammenhang aber unpraktischere) Definition wäre, daß eine monochromatische Welle von einem Prisma nicht aufgespalten wird.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_y^{y+\Delta} d\omega' \tilde{\vec{E}}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} + \int_{-y-\Delta}^{-y} d\omega' \tilde{\vec{E}}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_y^{y+\Delta} d\omega' \tilde{\vec{E}}(\omega') 2\pi\delta(\omega-\omega') + \int_{-y-\Delta}^{-y} d\omega' \tilde{\vec{E}}(\omega') 2\pi\delta(\omega-\omega')\right\} \\
&= \tilde{\vec{E}}(\omega)[\Theta(\omega-y)\Theta(y+\Delta-\omega) + \Theta(\omega-(-y-\Delta))\Theta(-y-\omega)].
\end{aligned}
$$

Damit erhält man für das Zeitintegral über die gefilterte Feldstärke[2]

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}_{\mathrm{F}}(t)|^2 dt &\overset{(*)}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\vec{E}}_{\mathrm{F}}(\omega)|^2 d\omega \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\vec{E}}(\omega)|^2 [\Theta(\omega-y)\Theta(y+\Delta-\omega) + \Theta(\omega-(-y-\Delta))\Theta(-y-\omega)] \\
&= 2\pi \left\{\int_y^{y+\Delta} |\tilde{\vec{E}}(\omega)|^2 d\omega + \int_{-y-\Delta}^{-y} |\tilde{\vec{E}}(\omega)|^2 d\omega\right\} \\
&= 2\pi \int_y^{y+\Delta} (|\tilde{\vec{E}}(\omega)|^2 + |\tilde{\vec{E}}(-\omega)|^2) d\omega,
\end{aligned}
$$

wobei bei der Umformung $(*)$ der Parsevalsche Satz verwendet wurde. Da $\vec{E}(t)$ als physikalische Meßgröße reell sein muß, gilt $\tilde{\vec{E}}(-\omega) = \tilde{\vec{E}}(\omega)^*$ (woraus erwartungsgemäß folgt, daß auch $\vec{E}_{\mathrm{F}}(t)$ reell ist). Damit erhält man für den spektralen Energiefluß, d. h. die Energie pro Frequenz und Fläche

$$
\begin{aligned}
\frac{dW(\omega)}{d\omega dA} &\equiv \lim_{\Delta\longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta}\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}_{\mathrm{F}}(t)|^2 dt = \lim_{\Delta\longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta}\frac{c}{4\pi} 2\pi \int_{\omega}^{\omega+\Delta} 2|\tilde{\vec{E}}(\omega')|^2 d\omega' \\
&= \lim_{\Delta\longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta}\frac{c}{2} 2|\tilde{\vec{E}}(\omega)|^2 \Delta = c|\tilde{\vec{E}}(\omega)|^2,
\end{aligned}
$$

womit Gleichung (2.26) bewiesen ist. Es wäre nun naheliegend, monochromatische Wellen mit Photonen zu identifizieren. Dies erscheint jedoch aus zwei Gründen problematisch: Zum einen stellt die monochromatische Welle als Funktion der elektrischen Feldstärke einen rein klassischen Begriff dar. Zum anderen würde eine solche Identifizierung bedeuten, daß Photonen stets eine eindeutige Energie aufweisen. Andererseits kann man die monochromatische Welle natürlich durchaus als einen klassischen Limes betrachten. Ihr entsprechen dann Photonen in einem Energie- bzw. genauer in einem Impulseigenzustand . Es ist daher sinnvoll, für die Beschreibung der Synchrotronstrahlung im Photonenbild diese Eigenzustände zu verwenden, wie sie ja sowieso im Rahmen der Quantenelektrodynamik betrachtet werden.

3.2 Synchrotronprozesse im Photonenbild

In Kapitel 2 wurde anhand einer klassischen Betrachtung die Synchrotronstrahlung von Ladungen im Magnetfeld hergeleitet. Hier soll nun die quantenmechanische Diskussion erfolgen,

[2] Vgl. Landau 1962, Jackson 1962, Rybicki 1979. Dort wird für die ungefilterte Feldstärke die Beziehung $\int_0^\infty c|\tilde{\vec{E}}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^\infty \frac{dW(\omega)}{d\omega dA} d\omega$ hergeleitet, um anschließend die Integranden zu identifizieren. Dies liefert zwar das richtige Ergebnis, ist aber kein Beweis.

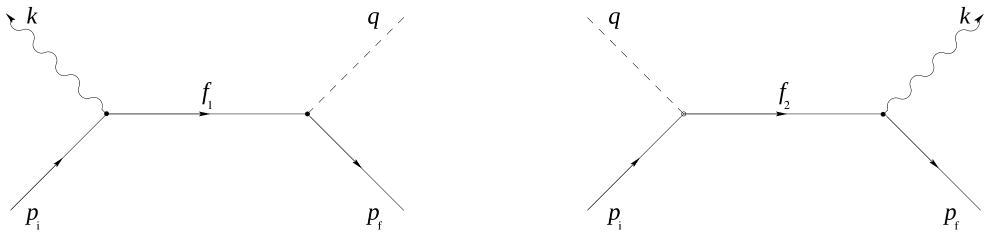

Abbildung 3.1: Feynman-Diagramme für die Synchrotronemission. Elektronen sind mit durchgehenden, klassische Vektorpotentiale mit gestrichelten Linien und Photonen mit Wellenlinien dargestellt. p_{i}, p_{f} und $\hbar k$ sind die Viererimpulse des einlaufenden, des auslaufenden Elektrons und des Photons; q stellt das Argument der Fouriertransformierten des Vektorpotentials dar. f_1 und f_2 bezeichnen jeweils den Gesamtimpuls.

die die Einführung von Einstein-Koeffizienten für die Synchrotronstrahlung rechtfertigt. Ausgangspunkt ist dabei die Überlegung, daß sich die Synchrotronstrahlung als Spezialfall der Wechselwirkung einer Ladung (wobei im folgenden o. E. d. A. ein Elektron betrachtet wird) mit einem klassischen (homogenen) Vierervektorpotential A unter Emission eines Photons auffassen läßt; sie ist also formal äquivalent zur Bremsstrahlung. Demnach wird sie in niedrigster Ordnung durch die Feynman-Diagramme in Abbildung (3.1) beschrieben. Für das Übergangselement ergibt sich daher aus den allgemeinen Regeln der Quantenelektrodynamik (Achieser 1962, Veltman 1994)

$$< f|S|i > \sim \frac{1}{\sqrt{V}^3}\sqrt{N_{\vec{k},s}+1}\,\delta^{(4)}() \tag{3.3}$$

Es bezeichnen in dieser Formel S die Streumatrix, $|i>$ den einlaufenden, $|f>$ den auslaufenden (Impulseigen-)Zustand, $N_{\vec{k},s}$ die Zahl der Photonen im durch den Wellenvektor $\vec{k}$ und den Spin s eindeutig festgelegten Zustand und V das betrachtete Volumen. Das nicht explizit aufgeführte Argument der Deltafunktion ist ein Viererimpuls und gewährleistet den Energie- und Impulserhaltungssatz. Zu dem Volumenfaktor trägt hierbei jedes ein- und auslaufende Teilchen $\frac{1}{\sqrt{V}}$ bei. Der Faktor $\sqrt{N_{\vec{k},s}+1}$ resultiert daraus, daß für die Photonenerzeugung ein Erzeugungsoperator $a^\dagger_{\vec{k},s}$ vorliegen muß, dessen Wirkung durch

$$a^\dagger_{\vec{k},s}|N_{\vec{k},s}(\vec{k},s)> = \sqrt{N_{\vec{k},s}+1}|(N_{\vec{k},s}+1)(\vec{k},s)> \tag{3.4}$$

gegeben ist. Die genaue Form des Proportionalitätsfaktors spielt für die folgende Diskussion keine Rolle; er wird daher auch nicht näher aufgeführt. Die Übergangswahrscheinlichkeit[3] P_{fi} als Betragsquadrat des Übergangselementes hat somit die Form

$$P_{\mathrm{fi}} = |< f|S|i >|^2 \sim \frac{1}{V^3}(N_{\vec{k},s}+1)\delta^{(4)}()^2. \tag{3.5}$$

Um dem Quadrat der Deltafunktion einen Sinn zu geben, geht man von der Ersetzungsregel

$$\sum_{\vec{k}} \longleftrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \tag{3.6}$$

[3] bzw. genauer das Produkt aus Übergangsrate und Wechselwirkungsdauer

zwischen Summen über Zustände (bei festem Spin) und Integrale im $\vec{k}$-Raum aus (die in bekannter Weise aus der Zustandsabzählung im Phasenraum folgt) und hält fest, daß aus ihr die Beziehung

$$\delta^{(3)}(\vec{k}) \longleftrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\vec{k},\vec{0}} \tag{3.7}$$

mit dem Kronecker-Delta $\delta_{\vec{k},\vec{0}}$ folgt. Da trivialerweise $\delta^2_{\vec{k},\vec{0}} = \delta_{\vec{k},\vec{0}}$ gilt, erhält man hieraus

$$[\delta^{(3)}(\vec{k})]^2 \longleftrightarrow \left[\frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\vec{k},\vec{0}}\right]^2 = \frac{V^2}{(2\pi)^6}\delta_{\vec{k},\vec{0}} \longleftrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\delta^{(3)}(\vec{k}). \tag{3.8}$$

Zudem sei (ohne nähere Begründung) heuristisch analog gefolgert, daß mit der Wechselwirkungsdauer T

$$[\delta^{(1)}(k^0)]^2 = \frac{T}{2\pi}\delta(k^{(0)}) \tag{3.9}$$

gesetzt werden darf (Veltman 1994). Für P_{fi} ergibt sich damit

$$P_{\text{fi}} \sim \frac{1}{V^3}(N_{\vec{k},s}+1)[\delta^{(1)}()\delta^{(3)}()]^2 \sim \frac{T}{V^2}(N_{\vec{k},s}+1)\delta^{(4)}(). \tag{3.10}$$

Nun bezeichnen N_{st} die Zahl der Photonenzustände und $\underline{n}(\vec{k})$ die Photonendichte pro Volumen im Wellenvektorraum. (Der Unterstrich (_) weist hier wie im folgenden darauf hin, daß die betreffende Größe pro Volumen im $\vec{k}$-Raum definiert ist.) Dann gilt zum einen nach Definition $N_{\vec{k},s}dN_{\text{st}} = \underline{n}(\vec{k})Vd^3k$ (wobei der Volumenfaktor V erforderlich ist, da $N_{\vec{k},s}$ eine Anzahl, $\underline{n}(\vec{k})$ jedoch eine Anzahldichte darstellt). Zum anderen erhält man (sofern nicht eine Spinrichtung bevorzugt ist) aus der Abzählung der Photonenzustände mit dem Spinfaktor 2 für Photonen

$$dN_{\text{st}} = \frac{2V}{(2\pi)^3}d^3k. \tag{3.11}$$

Insgesamt folgt daher mit der spektralen Energiedichte $\underline{u}(\vec{k}) \equiv h\nu\,\underline{n}(\vec{k})$

$$N_{\vec{k},s} = \underline{n}(\vec{k})V\frac{d^3k}{dN_{\text{st}}} = \underline{n}(\vec{k})\frac{(2\pi)^3}{2} = \frac{4\pi^3}{h\nu}\underline{u}(\vec{k}) \tag{3.12}$$

und somit für die Übergangsrate U_{fi} von $|i>$ nach $|f>$

$$U_{\text{fi}} \equiv \frac{dP_{\text{fi}}}{dt} = \frac{P_{\text{fi}}}{T} \sim \frac{1}{V^2}(N_{\vec{k},s}+1)\delta^{(4)}() = \frac{1}{V^2}\left(\frac{4\pi^3}{h\nu}\underline{u}(\vec{k})+1\right)\delta^{(4)}(). \tag{3.13}$$

U_{fi} beschreibt den Übergang zwischen zwei diskreten Zuständen $|i>$ und $|f>$. Im Limes eines unendlich großen Volumens V (und somit unendlich vieler Zustände) sollte daher $U_{\text{fi}} \longrightarrow 0$ gelten, wie es aufgrund des Faktors $\frac{1}{V^2}$ tatsächlich der Fall ist. Geht man zu einem Kontinuum von Zuständen über, ist zweimal mit dem Faktor $\frac{V}{(2\pi)^3}$ aus Gleichung (3.6) zu multiplizieren (für das auslaufende Elektron und das Photon), so daß die Volumenabhängigkeit der Übergangsrate erwartungsgemäß verschwindet. Gleichung (3.13) legt nun nahe, U_{fi} in einen spontanen Anteil U_{sp} unabhängig von und einen induzierten Anteil U_{ind} proportional zu der Energiedichte aufzuspalten, für die dann

$$U_{\text{ind}} = \frac{4\pi^3}{h\nu}\underline{u}(\vec{k})U_{\text{sp}} \tag{3.14}$$

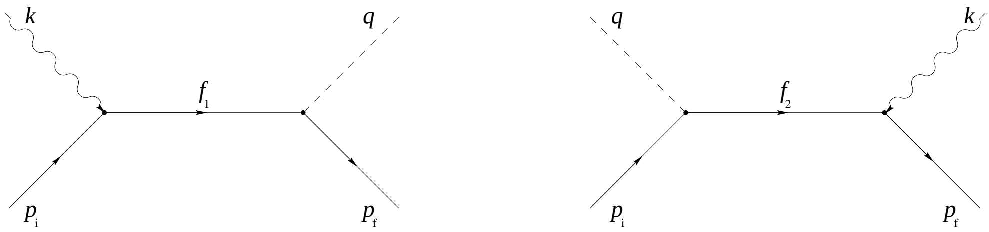

Abbildung 3.2: Feynman-Diagramme für die Synchrotronabsorption. Die Notation entspricht der in Abbildung (3.1).

gilt. Nun ist im Rahmen der Wechselwirkung eines Elektrons mit einem klassischen (homogenen) Vierervektorpotential neben der Emission auch die Absorption eines Photons denkbar. Diese wird durch die beiden Feynman-Diagramme in Abbildung (3.2) beschrieben. Man ersieht leicht, daß der einzige Unterschied zur Emission darin besteht, daß der dort auftretende Photonenerzeugungsoperator durch den entsprechenden Vernichtungsoperator zu ersetzen ist. Da dessen Wirkung durch

$$a_{\vec{k},s}|N_{\vec{k},s}(\vec{k},s)>=\sqrt{N_{\vec{k},s}}|(N_{\vec{k},s}-1)(\vec{k},s)> \tag{3.15}$$

gegeben ist, folgt hieraus, daß im Übergangselement der Emission nur der Faktor $\sqrt{N_{\vec{k},s}+1}$ durch $\sqrt{N_{\vec{k},s}}$ ersetzt werden muß. Für die Übergangsrate U_{abs} der Absorption ergibt sich daher

$$U_{\text{abs}}=U_{\text{ind}}. \tag{3.16}$$

Es seien nun durch

$$A_{21}(|i>,|f>)\equiv U_{\text{sp}} \tag{3.17}$$

$$B_{21}(|i>,|f>)\equiv\frac{U_{\text{ind}}}{2\pi k^2\underline{u}(\vec{k})}\ ,\ B_{12}(|f>,|i>)\equiv\frac{U_{\text{abs}}}{2\pi k^2\underline{u}(\vec{k})} \tag{3.18}$$

die Größen A_{21}, B_{21} und B_{12} eingeführt, wobei $\vec{k}$ der Wellenvektor des emittierten bzw. absorbierten Photons sei. Man ersieht sofort, daß A_{21} einem Einstein-Koeffizienten für die spontane Emission entspricht. Daß zudem auch B_{12} und B_{21} Einstein-Koeffizienten darstellen, ergibt sich, wenn man zu einem isotropen Strahlungsfeld, d. h. $\underline{u}(\vec{k})=\underline{u}(k)$ übergeht. In diesem Fall erhält man mit der spektralen Energiedichte (pro Wellenvektorbetrag) $u(k)=k^2\underline{u}(k)$ und der Intensität $I_\nu=cu(\nu)=c\frac{2\pi}{c}u(k)$ für U_{ind}

$$U_{\text{ind}}=B_{21}\cdot 2\pi k^2\underline{u}(k)=B_{21}\cdot 2\pi u(k)=B_{21}I_\nu \tag{3.19}$$

und analog für U_{abs} noch $U_{\text{abs}}=B_{12}I_\nu$. B_{21} und B_{12} lassen sich also tatsächlich als Einstein-Koeffizienten der induzierten Emission bzw. der Absorption deuten. Aus den Gleichungen (3.14) und (3.16) ergibt sich nun noch

$$\frac{A_{21}(|i>,|f>)}{B_{21}(|i>,|f>)}=2\pi k^2\underline{u}(\vec{k})\frac{U_{\text{sp}}}{U_{\text{ind}}}=2\pi k^2\underline{u}(\vec{k})\cdot\frac{h\nu}{4\pi^3\underline{u}(\vec{k})}=\frac{2h\nu^3}{c^2} \tag{3.20}$$

$$\frac{B_{21}(|i>,|f>)}{B_{12}(|f>,|i>)}=\frac{U_{\text{ind}}}{U_{\text{abs}}}=1. \tag{3.21}$$

Dies sind gerade die wohlbekannten Einstein-Beziehungen, deren Verwendung zur Beschreibung der Synchrotronstrahlung also gerechtfertigt ist. Sie sind für das folgende Kapitel von entscheidender Bedeutung.

Kapitel 4

Kinetische Gleichungen I

4.1 Gleichungen für die Synchrotronstrahlung

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, daß die Synchrotronstrahlung zwischen diskreten Zuständen mittels der Einstein-Koeffizienten A_{21}, B_{21}, B_{12} beschrieben werden kann, die den bekannten Einnstein-Beziehungen genügen:

$$A_{21}(|i>,|f>) = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}(|i>,|f>) \tag{4.1}$$

$$B_{12}(|i>,|f>) = B_{21}(|f>,|i>). \tag{4.2}$$

Im folgenden soll nun die Voraussetzung diskreter Zustände fallengelassen werden. Formal entspricht dies dem Übergang zu einem unendlichen Volumen. Dazu definiert man zunächst „kontinuierliche“ Einstein-Koeffizienten durch

$$A_{21}(\vec{p},\vec{p}') \equiv \frac{\text{Übergänge von } \vec{p} \text{ in das Volumenelement } d^3p' \text{ um } \vec{p}'}{\text{Zeitintervall} \times d^3p'} \tag{4.3}$$

und die analogen Beziehungen für die Koeffizienten der induzierten Emission und der Absorption. Bezeichnet nun $S(\vec{p}')$ die Menge

$$S(\vec{p}') \equiv \{|f> \mid \text{Der zu } |f> \text{ gehörige Impuls liegt im Volumenelement } d^3p' \text{ um } \vec{p}'.\},$$

so folgt aus Definition (4.3) und Gleichung (3.11) mit $p = \hbar k$ unmittelbar

$$A_{21}(\vec{p},\vec{p}')d^3p' = \sum_{|f>\in S(\vec{p}')} A_{21}(|i>,|f>) = d^3p' \frac{2V}{h^3} A_{21}(|i>,|f'>), \tag{4.4}$$

wobei $|i>$ bzw. $|f'>$ den dem Impuls $\vec{p}$ bzw. $\vec{p}'$ entsprechenden Zustand bezeichnen. Die Division beider Seiten durch das Volumenelement d^3p' liefert

$$A_{21}(\vec{p},\vec{p}') = \frac{2V}{h^3} A_{21}(|i>,|f'>). \tag{4.5}$$

Völlig analog erhält man für B_{21} und B_{12} die Beziehungen

$$B_{21}(\vec{p},\vec{p}') = \frac{2V}{h^3} B_{21}(|i>,|f'>) \tag{4.6}$$

Größe	Notation
Photonen	
Wellenvektor, Kreisfrequenz, Frequenz	$\vec{k}$, ω, ν
spektrale Photonendichte (pro k^3-Volumen)	$\underline{N}(\vec{k}) = \frac{dZ}{d^3k\, dV}$
spektrale Photonendichte (pro k)	$N(k) = \frac{dZ}{dk\, dV}$
spektrale Energiedichte (pro k)	$W(k) = \frac{dE}{dk\, dV}$
spektrale Energiedichte (pro ω)	$W(\omega) = \frac{dE}{d\omega\, dV}$
„zustandsnormierte" spektrale Energiedichte (pro ω)	$\Omega(\omega) = \frac{W(\omega)}{\omega^2}$
Intensität	$I(\nu) \equiv I_\nu$
Elektronen	
Impuls, Energie	$\vec{p}$, ϵ
spektrale Elektronendichte (pro p^3-Volumen)	$\underline{f}(\vec{p}) = \frac{dZ}{d^3p\, dV}$
spektrale Elektronendichte (pro p)	$f(p) = \frac{dZ}{dp\, dV}$
spektrale Elektronendichte (pro ϵ)	$f(\epsilon) = \frac{dZ}{d\epsilon\, dV}$
„zustandsnormierte" spektrale Elektronendichte (pro ϵ)	$\varphi(\epsilon) = \frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}$
Einstein-Koeffizienten	
spontane Emission etc. (pro p'^3-Volumen)	$\underline{A}(\vec{p}, \vec{p}')$ etc.
spontane Emission etc. (pro p')	$A(\vec{p}, p') = \int_{4\pi} \underline{A}(\vec{p}, \vec{p}') p'^2 d\Omega_{p'}$ etc.

Tabelle 4.1: Notation für die Herleitung der kinetischen Gleichungen. Z bezeichnet die jeweilige Zahl der Teilchen oder Übergänge, E die Energie. Die Bedeutung des Unterstriches (_) wird im Haupttext erläutert.

$$B_{12}(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{2V}{h^3} B_{12}(|i>, |f'>). \tag{4.7}$$

Aus den Gleichungen (4.5) bis (4.7) folgt unmittelbar, daß die Einstein-Beziehungen auch für die kontinuerlichen Koeffizienten gelten:

$$A_{21}(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}(\vec{p}, \vec{p}') \tag{4.8}$$

$$B_{12}(\vec{p}, \vec{p}') = B_{21}(\vec{p}', \vec{p}). \tag{4.9}$$

Zusammen mit der Überlegung, daß sich der Einstein-A-Koeffizient mit Hilfe der (spontanen) Emissivität ausdrücken läßt, ermöglicht dies die Herleitung der kinetischen Gleichungen (d. h. der zeitlichen Änderung der Verteilungsfunktionen) für die Synchrotronstrahlung.
Bevor die kinetischen Gleichungen explizit hergeleitet werden, sei noch kurz die verwendete Notation erläutert: Allgemein werden von einem Vektor $\vec{v}$ bzw. dessen Betrag abhängende Verteilungsfunktionen und Einstein-Koeffizienten mit einem Unterstrich (_) versehen, falls sie

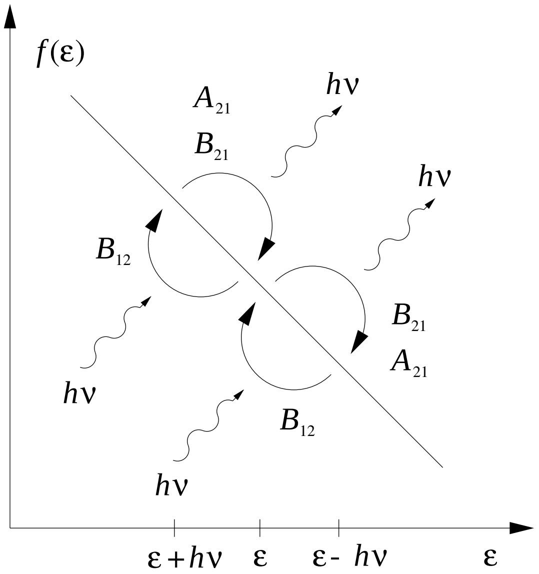

Abbildung 4.1: Emission und Absorption. Die Zahl der Photonen in einem bestimmten Energieintervall wird durch spontane und induzierte Emission stets vergrößert, durch Absorption verkleinert. Dagegen führen alle drei Prozesse dazu, daß Elektronen sowohl in ein bestimmtes Energieintervall gelangen als auch dieses verlassen. Man benötigt daher in der Bilanzgleichung für Photonen pro Prozeß einen Term, in der für Elektronen zwei Terme.

pro v^3-Volumen definiert sind. Fehlt dieser Unterstrich, sind sie pro $|\vec{v}|$ erklärt. Bei Raumwinkeln Ω gibt der jeweilige Index an, bezüglich welcher Größe der Raumwinkel zu betrachten ist. Zudem werden, wie allgemein üblich, einige Symbole für verschiedene Funktionen verwendet, sofern die unterschiedliche Bedeutung am Argument abgelesen werden kann. Schließlich wird die Zeitabhängigkeit nicht explizit aufgeführt. Alles weitere ist Tabelle (4.1) zu entnehmen.
Um nun die kinetische Gleichung für die Photonenverteilung herzuleiten, macht man zunächst die Annahme, daß die Profilfunktion der Emission und Absorption durch eine Deltafunktion approximiert werden darf, d. h. daß die Linienverbreiterung vernachlässigbar ist, und daß eine isotrope Photonenverteilung vorliegt. Ferner schreibt man die kontinuierlichen Einstein-Koeffizienten als Funktion des Elektronenimpulses vor dem Übergang und des Wellenvektors des emittierten Photons. Die Einstein-Beziehungen gelten natürlich auch für die so definierten Koeffizienten und sind von der Form

$$\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\underline{B}_{21}(\vec{p},\vec{k}) \tag{4.10}$$

$$\underline{B}_{12}(\vec{p},\vec{k}) = \underline{B}_{21}(\vec{p}+\hbar\vec{k},\vec{k}). \tag{4.11}$$

Damit kann man leicht die Bilanzgleichung für die Photonenzahl (bzw. -dichte) aufstellen (vgl. Abbildung (4.1)):[1]

$$\frac{\partial \underline{N}(\vec{k})}{\partial t} = \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) + \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{B}_{21}(\vec{p},\vec{k})I_\nu - \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{B}_{12}(\vec{p},\vec{k})I_\nu. \tag{4.12}$$

Der erste Term beinhaltet hierbei die spontane, der zweite die induzierte Emission und der dritte die Absorption. Die Integrationen erstrecken sich jeweils über alle Impulse. Der Integrand

[1] Zur folgenden Darstellung vgl. McCray (1969) und Norman (1974).

ist für einen gegebenen Wellenvektor jedoch nur auf einem kleinen Intervall signifikant, so daß (hinreichend hohe Frequenzen vorausgesetzt) die Integralgrenzen keine besondere Rolle spielen. Dies wird im folgenden bei Variablentransformationen stillschweigend vorausgesetzt. Man formt nun die rechte Seite unter Verwendung der Gleichungen (4.10) und (4.11) und der Variablensubstitution $\vec{p}' = \vec{p} + \hbar\vec{k}$ um:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{N}(\vec{k})}{\partial t} &= \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) + \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{B}_{21}(\vec{p},\vec{k})I_\nu - \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{B}_{21}(\vec{p}+\hbar\vec{k},\vec{k})I_\nu \\
&= \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) + \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{B}_{21}(\vec{p},\vec{k})I_\nu - \int d^3p'\underline{f}(\vec{p}'-\hbar\vec{k})\underline{B}_{21}(\vec{p}',\vec{k})I_\nu \\
&\overset{(*)}{=} \int d^3p\underline{f}(\vec{p})\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) + \int d^3p[\underline{f}(\vec{p}) - \underline{f}(\vec{p}-\hbar\vec{k})]\underline{B}_{21}(\vec{p},\vec{k})I_\nu \\
&= \int d^3p\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k})\left\{\underline{f}(\vec{p}) + \frac{c^2}{2h\nu^3}[\underline{f}(\vec{p}) - \underline{f}(\vec{p}-\hbar\vec{k})]I_\nu\right\}.
\end{aligned}$$

Bei der Umformung $(*)$ wurde $\vec{p}'$ in $\vec{p}$ umbenannt. Integriert man nun beide Seiten über die Oberfläche der Kugel mit Radius k im $\vec{k}$-Raum, ergibt sich

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = \int_{4\pi} d\Omega_k k^2 \frac{\partial \underline{N}(\vec{k})}{\partial t} = \int_{4\pi} d\Omega_k k^2 \int d^3p\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k})\left\{\underline{f}(\vec{p}) + \frac{c^2}{2h\nu^3}[\underline{f}(\vec{p}) - \underline{f}(\vec{p}-\hbar\vec{k})]I_\nu\right\}.$$

Man kann die so erhaltene Gleichung weiter vereinfachen, wenn man hochrelativistische Elektronen betrachtet und die Näherung $\epsilon \approx pc$ verwendet. In diesem Fall lassen sich der Impuls- und der Energieerhaltungssatz für ein einzelnes Lepton zusammenfassen zu

$$pc = |\vec{p} - \hbar\vec{k}|c + \hbar kc,$$

woraus unmittelbar

$$|\vec{p} - \hbar\vec{k}| = p - \hbar k$$

folgt. Demnach müssen der Elektronen- und der Photonenimpuls in die selbe Richtung weisen (Beaming-Effekt). In Polarkoordinaten ausgedrückt, bedeutet dies, daß die Polarwinkel $\vartheta_{\vec{p}}$, $\vartheta_{\vec{k}}$ und die Azimuthalwinkel $\varphi_{\vec{p}}$, $\varphi_{\vec{k}}$ für $\vec{p}$ und $\vec{k}$ übereinstimmen. Daher muß $\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k})$ von der Form

$$\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) = g(\vec{p},\vec{k})\delta(\cos\vartheta_{\vec{p}} - \cos\vartheta_{\vec{k}})\delta(\varphi_{\vec{p}} - \varphi_{\vec{k}})$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion $g(\vec{p},\vec{k})$ sein. Andererseits gilt (definitionsgemäß)

$$A_{21}(\vec{p},k) \equiv \int_{4\pi} d\Omega_k k^2 \underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) = \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta_k) k^2 g(\vec{p},\vec{k})\delta(\cos\vartheta_{\vec{p}} - \cos\vartheta_{\vec{k}})\delta(\varphi_{\vec{p}} - \varphi_{\vec{k}}).$$

Man kann kann also für die Funktion $g(\vec{p},\vec{k})$ die Wahl

$$g(\vec{p},\vec{k}) = \frac{A_{21}(\vec{p},k)}{k^2}$$

treffen, so daß man insgesamt

$$\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) = \frac{A_{21}(\vec{p},k)}{k^2}\delta(\cos\vartheta_{\vec{p}} - \cos\vartheta_{\vec{k}})\delta(\varphi_{\vec{p}} - \varphi_{\vec{k}}) \tag{4.13}$$

erhält. Damit ergibt sich für $\frac{\partial N(k)}{\partial t}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(k)}{\partial t} &= \int d^3p \int_{4\pi} d\Omega_k k^2 \underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{k}) \left\{ \underline{f}(\vec{p}) + \frac{c^2}{2h\nu^3}[\underline{f}(\vec{p}) - \underline{f}(\vec{p} - \hbar\vec{k})]I_\nu \right\} \\
&= \int d^3p \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta_k) k^2 \frac{A_{21}(\vec{p},k)}{k^2} \delta(\vartheta_{\vec{p}} - \vartheta_{\vec{k}})\delta(\varphi_{\vec{p}} - \varphi_{\vec{k}}) \cdot \\
&\qquad \cdot \left\{ \underline{f}(\vec{p}) + \frac{c^2}{2h\nu^3}[\underline{f}(\vec{p}) - \underline{f}(\vec{p} - \hbar\vec{k})]I_\nu \right\} \\
&\overset{(*)}{=} \int d^3p A_{21}(\vec{p},k) \left\{ \underline{f}(p) + \frac{c^2}{2h\nu^3}[\underline{f}(p) - \underline{f}(p - \hbar k)]I_\nu \right\} \\
&\overset{(**)}{=} \int d^3p A_{21}(\vec{p},k) \left\{ \underline{f}(p) + \frac{c^2}{2h\nu^3}\hbar k \frac{\partial \underline{f}(p)}{\partial p} I_\nu \right\}.
\end{aligned}$$

Bei der Umformung $(*)$ wurde vorausgesetzt, daß die Elektronenverteilung isotrop ist und somit $\underline{f}(\vec{p}) = \underline{f}(p)$ und (wegen $\vec{k} \parallel \vec{p}$) $\underline{f}(\vec{p} - \hbar\vec{k}) = \underline{f}(p - \hbar k)$ gilt. Bei der Umformung $(**)$ wurde dagegen vorausgesetzt, daß $\hbar k \ll p$ ist und daher $\underline{f}(p - \hbar k)$ durch die Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung ersetzt werden darf. Die Beziehung $\hbar k \ll p$ ist hierbei äquivalent zu $\hbar\omega \ll pc = \epsilon = \gamma mc^2$. Da man gemäß der Diskussion in Abschnitt 2.2 die Kreisfrequenz der emittierten Synchrotronstrahlung größenordnungsmäßig durch $0.29\omega_c$ (mit ω_c aus Gleichung (2.42) abschätzen kann, ist die Forderung $\hbar k \ll p$ demnach gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
\frac{0.29\hbar\omega_c}{\gamma mc^2} &= \frac{0.29\hbar}{\gamma mc^2}\frac{3\gamma^2 qB\sin\alpha}{2mc} = \left.\frac{3\cdot 0.29\hbar qB\sin\alpha\cdot\gamma}{2m^2c^2}\right|_{\mathrm{SI}} \\
&= 9.9\cdot 10^{-11}\left(\frac{m}{m_e}\right)^{-2}\left(\frac{q}{e}\right)\left(\frac{B}{1\,\mathrm{T}}\right)\sin\alpha\cdot\gamma \overset{!}{\ll} 1
\end{aligned}$$

(mit dem Pitchwinkel α), die im allgemeinen für die vorliegenden Elektronenenergien erfüllt ist. Die Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung ist also gerechtfertigt.
Um das Integral über den $\vec{p}$-Raum vereinfachen zu können, macht man noch die Annahme, daß die spontane Emission richtungsunabhängig ist und somit $A_{21}(\vec{p},k) = A_{21}(p,k)$ gilt. Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn das Magnetfeld keine bevorzugte Richtung aufweist. Unter Zuhilfenahme der Beziehungen $\epsilon = pc$, $\underline{f}(p) = \frac{1}{4\pi p^2}f(p)$, $f(p) = cf(\epsilon)$ und $\nu = \frac{c}{2\pi}k$ erhält man dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(k)}{\partial t} &= \int dp\, 4\pi p^2 A_{21}(p,k) \left\{ \frac{f(p)}{4\pi p^2} + \frac{c^2}{2h\left(\frac{c}{2\pi}\right)^3 k^3}\hbar k \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f(p)}{4\pi p^2}\right) I_\nu \right\} \\
&= \int d\epsilon A_{21}(p,k) \left\{ f(\epsilon) + \frac{2\pi^2}{k^2}\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right) I_\nu \right\}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen E (wie auch in Tabelle (4.1)) die Strahlungsenergie über alle Raumwinkel und u die Energiedichte pro Raumwinkel, so gilt nun aber (für eine isotrope Photonenverteilung)

$$I_\nu = \frac{c\,du}{d\nu} = \frac{c\frac{1}{4\pi}dE}{dV\,d\nu} = \frac{c}{4\pi}\frac{dE}{dV\frac{c}{2\pi}dk} = \frac{1}{2}\frac{dE}{dV\,dk} = \frac{1}{2}W(k). \tag{4.14}$$

Schreibt man noch für $A_{21}(p,k) = A_{21}(p(\epsilon),k)$ kurz $A_{21}(\epsilon,k)$, ergibt sich daher

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = \int d\epsilon A_{21}(\epsilon,k)\left\{f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{k^2}\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right)W(k)\right\}. \tag{4.15}$$

Nun entspricht zum einen $A_{21}(\epsilon,k)\hbar\omega$ gerade der winkelgemittelten spektralen Synchrotronemissivität $\overline{P}(\epsilon,k) = c\overline{P}(\epsilon,\omega)$, wobei sich $\overline{P}(\epsilon,\omega)$ aus Gleichung (2.48) durch Mittelung über alle Raumwinkel ergibt. Zum anderen besteht zwischen der spektralen Energie- und der spektralen Photonendichte die Beziehung $W(k) = N(k)\hbar\omega$. Multipliziert man beide Seiten von Gleichung (4.15) mit $\frac{\hbar\omega}{c}$, erhält man somit wegen $\omega = kc$ und $W(\omega) = \frac{1}{c}W(k)$

$$\boxed{\frac{\partial W(\omega)}{\partial t} = \int d\epsilon\overline{P}(\epsilon,\omega)\left\{f(\epsilon) + \frac{\pi^2c^3}{\omega^2}\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right)W(\omega)\right\}.} \tag{4.16}$$

Dies ist die kinetische Gleichung für die Photonen unter der Annahme, daß die Verteilungsfunktionen und das Magnetfeld isotrop sind.

Um nun die entsprechende Gleichung für die Elektronenverteilungsfunktion herleiten zu können, werden die kontinuierlichen Einstein-Koeffizienten wieder als Funktion der Impulse vor und nach dem Übergang aufgefaßt. Damit erhält man als Bilanzgleichung für die Elektronen (vgl. wieder Abbildung (4.1))

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{f}(\vec{p})}{\partial t}d^3p \;=\;& \int d^3p_2\underline{f}(\vec{p}_2)[\underline{A}_{21}(\vec{p}_2,\vec{p})d^3p] - \underline{f}(\vec{p})d^3p\int d^3p_1\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{p}_1)\\
&+\int d^3p_2\underline{f}(\vec{p}_2)[I_\nu\underline{B}_{21}(\vec{p}_2,\vec{p})d^3p] - \underline{f}(\vec{p})d^3p\int d^3p_1\underline{B}_{21}(\vec{p},\vec{p}_1)I_\nu\\
&+\int d^3p_1\underline{f}(\vec{p}_1)[I_\nu\underline{B}_{12}(\vec{p}_1,\vec{p})d^3p] - \underline{f}(\vec{p})d^3p\int d^3p_2\underline{B}_{12}(\vec{p},\vec{p}_2)I_\nu.
\end{aligned}$$

Die ersten zwei Terme resultieren aus der spontanen, die beiden mittleren Terme aus der induzierten Emission und die letzten zwei aus der Absorption. Der jeweils erste Term gibt dabei an, wie viele Elektronen in das betrachtete Impulsintervall übergehen, der jeweils zweite Term, wie viele Elektronen dieses Impulsintervall verlassen. Wie bei der Diskussion der Photonen erstrecken sich die Integrale über alle Impulse, wobei die Grenzen nicht explizit aufgeführt werden und ihre Änderung bei Variablentransformationen unberücksichtigt bleibt. Dividiert man beide Seiten der Bilanzgleichung durch das Volumenelement d^3p, ergibt sich unter Ausnutzung der Einstein-Beziehungen (4.8) und (4.9)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{f}(\vec{p})}{\partial t} \;=\;& \int d^3p_2\underline{f}(\vec{p}_2)\underline{A}_{21}(\vec{p}_2,\vec{p}) - \int d^3p_1\underline{f}(\vec{p})\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{p}_1)\\
&+\int d^3p_2\underline{f}(\vec{p}_2)\underline{B}_{21}(\vec{p}_2,\vec{p})I_\nu - \int d^3p_1\underline{f}(\vec{p})\underline{B}_{21}(\vec{p},\vec{p}_1)I_\nu\\
&+\int d^3p_1\underline{f}(\vec{p}_1)\underline{B}_{21}(\vec{p},\vec{p}_1)I_\nu - \int d^3p_2\underline{f}(\vec{p})\underline{B}_{21}(\vec{p}_2,\vec{p})I_\nu\\
=\;& \int d^3p_2\underline{f}(\vec{p}_2)\underline{A}_{21}(\vec{p}_2,\vec{p}) - \int d^3p_1\underline{f}(\vec{p})\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{p}_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int d^3p_2\underline{f}(\vec{p}_2)\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{A}_{21}(\vec{p}_2,\vec{p})I_\nu-\int d^3p_1\underline{f}(\vec{p})\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{p}_1)I_\nu \\
&+\int d^3p_1\underline{f}(\vec{p}_1)\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{p}_1)I_\nu-\int d^3p_2\underline{f}(\vec{p})\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{A}_{21}(\vec{p}_2,\vec{p})I_\nu .
\end{aligned}
$$

Es sei nun angenommen, daß die Elektronen hochrelativistisch sind und somit $\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{p}')$ analog zu Gleichung (4.13) durch

$$\underline{A}_{21}(\vec{p},\vec{p}') = \frac{A_{21}(\vec{p},p')}{p'^2}\delta(\cos\vartheta_p-\cos\vartheta_{p'})\delta(\varphi_p-\varphi_{p'})$$

ausgedrückt werden kann. Setzt man diesen Ausdruck ein und führt bei den dreidimensionalen Integralen jeweils die Integration über alle Raumwinkel aus, so erhält man für eine isotrope Elektronenverteilung (d. h. $\underline{f}(\vec{p})=\underline{f}(p)$)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{f}(p)}{\partial t} = &\int dp_2p_2^2\underline{f}(p_2)\frac{A_{21}(\vec{p}_{2\parallel},p)}{p^2}-\int dp_1p_1^2\underline{f}(p)\frac{A_{21}(\vec{p},p_1)}{p_1^2} \\
&+\int dp_2p_2^2\underline{f}(p_2)\frac{c^2}{2h\nu^3}\frac{A_{21}(\vec{p}_{2\parallel},p)}{p^2}I_\nu-\int dp_1p_1^2\underline{f}(p)\frac{c^2}{2h\nu^3}\frac{A_{21}(\vec{p},p_1)}{p_1^2}I_\nu \\
&+\int dp_1p_1^2\underline{f}(p_1)\frac{c^2}{2h\nu^3}\frac{A_{21}(\vec{p},p_1)}{p_1^2}I_\nu-\int dp_2p_2^2\underline{f}(p)\frac{c^2}{2h\nu^3}\frac{A_{21}(\vec{p}_{2\parallel},p)}{p^2}I_\nu ,
\end{aligned}
$$

wobei der Index $_\parallel$ daran erinnert, daß $\vec{p}_2$ in die selbe Richtung wie $\vec{p}$ weist. Unter der Voraussetzung, daß ein isotropes Magnetfeld vorliegt, kann man $A_{21}(\vec{p},p')$ als $A_{21}(p,p')$ schreiben. Verwendet man noch die Substitutionen $p_1=p-x$ und $p_2=p+x$, so erhält man in diesem Fall

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{f}(p)}{\partial t} = &\int d(p+x)\underline{f}(p+x)\frac{(p+x)^2}{p^2}A_{21}(p+x,p)+\int d(p-x)\underline{f}(p)A_{21}(p,p-x) \\
&+\int d(p+x)\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{f}(p+x)\frac{(p+x)^2}{p^2}A_{21}(p+x,p)I_\nu \\
&\qquad+\int d(p-x)\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{f}(p)A_{21}(p,p-x)I_\nu \\
&-\int d(p-x)\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{f}(p-x)A_{21}(p,p-x)I_\nu \\
&\qquad-\int d(p+x)\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{f}(p)\frac{(p+x)^2}{p^2}A_{21}(p+x,p)I_\nu .
\end{aligned}
$$

Die Vorzeichen der Integrale folgen daraus, daß sich die Integralgrenzen auf x beziehen und daß jeweils die Ober- größer als die Untergrenze sein soll. Bezeichnet man nun die Funktion $A_{21}(p,p'(p,p-p'))$ einfach als $\hat{A}_{21}(p,p-p')$, ergibt sich zusammen mit der Beziehung $\underline{f}(p)=\frac{f(p)}{4\pi p^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{f}(p)}{\partial t} = &\int dx\underline{f}(p+x)\frac{(p+x)^2}{p^2}\hat{A}_{21}(p+x,x)-\int dx\underline{f}(p)\hat{A}_{21}(p,x) \\
&+\int dx\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{f}(p+x)\frac{(p+x)^2}{p^2}\hat{A}_{21}(p+x,x)I_\nu-\int dx\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{f}(p)\hat{A}_{21}(p,x)I_\nu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int dx\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{f}(p-x)\hat{A}_{21}(p,x)I_\nu-\int dx\frac{c^2}{2h\nu^3}\underline{f}(p)\frac{(p+x)^2}{p^2}\hat{A}_{21}(p+x,x)I_\nu\\
=\quad&\frac{1}{4\pi p^2}\int dx[f(p+x)\hat{A}_{21}(p+x,x)-f(p)\hat{A}_{21}(p,x)]\\
&+\frac{1}{4\pi p^2}\int dx\frac{c^2}{2h\nu^3}I_\nu\Big[f(p+x)\hat{A}_{21}(p+x,x)-f(p)\hat{A}_{21}(p,x)\\
&\qquad+\frac{p^2}{(p-x)^2}f(p-x)\hat{A}_{21}(p,x)-\frac{(p+x)^2}{p^2}f(p)\hat{A}_{21}(p+x,x)\Big].
\end{aligned}
$$

Da $\hat{A}_{21}(p,x)$ als Funktion von x für nicht zu große p nur auf einem kleinen Intervall um x signifikant ist und somit $x \ll p$ angenommen werden darf, kann man f und in der ersten Variablen auch A_{21} durch die Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung ersetzen. Damit lassen sich die Terme in den eckigen Klammern wie folgt vereinfachen:

$$
f(p+x)\hat{A}_{21}(p+x,x)-f(p)\hat{A}_{21}(p,x)=x\frac{\partial}{\partial p}\Big(f(p)\hat{A}_{21}(p,x)\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
&f(p+x)\hat{A}_{21}(p+x,x)-f(p)\hat{A}_{21}(p,x)+\frac{p^2}{(p-x)^2}f(p-x)\hat{A}_{21}(p,x)\\
&\qquad\qquad-\frac{(p+x)^2}{p^2}f(p)\hat{A}_{21}(p+x,x)\\
=\quad&(p+x)^2\hat{A}_{21}(p+x,x)\left\{\frac{f(p+x)}{(p+x)^2}-\frac{f(p)}{p^2}\right\}-p^2\hat{A}_{21}(p,x)\left\{\frac{f(p)}{p^2}-\frac{f(p-x)}{(p-x)^2}\right\}\\
=\quad&(p+x)^2\hat{A}_{21}(p+x,x)x\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f(p)}{p^2}\right)\Bigg|_{p+x}-p^2\hat{A}_{21}(p,x)x\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f(p)}{p^2}\right)\\
=\quad&x\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2\hat{A}_{21}(p,x)x\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f(p)}{p^2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Hiermit ergibt sich für $f(p)$

$$
\frac{\partial f(p)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\int dx\left\{xf(p)\hat{A}_{21}(p,x)+\frac{c^2}{2h\nu^3}I_\nu x^2p^2\hat{A}_{21}(p,x)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f(p)}{p^2}\right)\right\}\right). \tag{4.17}
$$

Es sei nun $x\equiv\hbar k$. Dann folgt aus $\omega=kc$, $W(k)=cW(\omega)$ und Gleichung (4.14) für I_ν

$$
\frac{c^2}{2h\nu^3}I_\nu x=\frac{c^2}{2h\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\omega^3}\frac{1}{2}cW(\omega)\frac{h}{2\pi}\frac{\omega}{c}=\frac{\pi^2c^2}{\omega^2}W(\omega).
$$

Setzt man diese Beziehung in Gleichung (4.17) ein, so ergibt sich unter Verwendung von $\epsilon=pc$, $f(p)=cf(\epsilon)$ und $\hbar k\hat{A}_{21}(p,x)dx=\frac{1}{c}\hbar\omega\hat{A}_{21}(p,\omega)d\omega=\frac{1}{c}\overline{P}(\epsilon,\omega)d\omega$ mit der winkelgemittelten spektralen Synchrotronemissivität $\overline{P}(\epsilon,\omega)$

$$
\boxed{\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\int d\omega\overline{P}(\epsilon,\omega)\left\{f(\epsilon)+\frac{\pi^2c^3}{\omega^2}\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right)W(\omega)\right\}\right).} \tag{4.18}
$$

Dies ist die kinetische Gleichung für die Elektronen unter der Annahme, daß die Verteilungsfunktionen und das Magnetfeld isotrop sind.
Es bleibt noch die winkelgemittelte Synchrotronemissivität $\overline{P}(\epsilon,\omega)$ zu berechnen. Dazu führt man die Notation

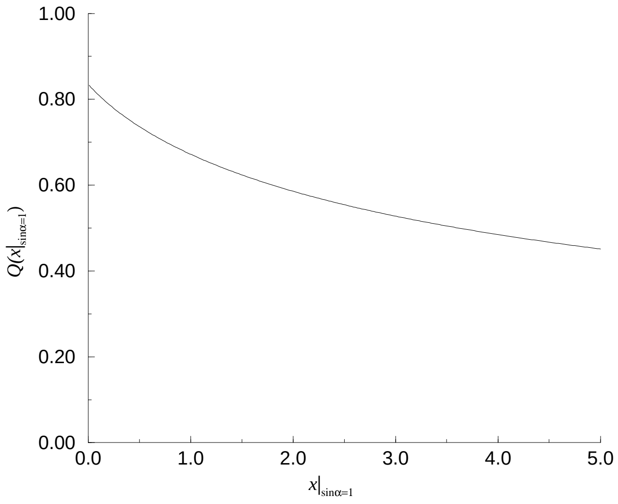

Abbildung 4.2: Das Verhältnis $Q(\tilde{x})$ mit $\tilde{x} = x|_{\sin\,\alpha}$.

$$\tilde{x} \equiv x \sin\alpha = \frac{\omega}{\omega_c|_{\sin\,\alpha=1}} \tag{4.19}$$

ein, wobei $x \equiv \frac{\omega}{\omega_c}$ und $\omega_c = \frac{3\gamma^2 qB \sin\alpha}{2mc}$ gilt. Ferner wählt man für die Winkelmittelung Kugelkoordinaten derart, daß der Polarwinkel dem Pitchwinkel α entspricht. Dann ergibt sich für $\overline{P}(\epsilon,\omega)$ aus Gleichung (2.48) mit $\mu \equiv \cos\vartheta$

$$\begin{aligned}
\overline{P}(\epsilon,\omega) &\equiv \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\Omega P(\omega) = \frac{1}{4\pi}\frac{\sqrt{3}q^3B}{2\pi mc^2}\int_{4\pi} d\Omega \sin\alpha F\left(\frac{\tilde{x}}{\sin\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{\sqrt{3}q^3B}{2\pi mc^2}\int_{-1}^{1} d(\cos\alpha)\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\alpha F\left(\frac{\tilde{x}}{\sin\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}q^3B}{2\pi mc^2}\int_{-1}^{1} d\mu\sqrt{1-\mu^2}F\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1-\mu^2}}\right).
\end{aligned}$$

Der Einfluß der Mittelung ist deutlicher zu sehen, wenn man eine normierte Größe einführt, wie sie das wie folgt definierte Verhältnis $Q(\tilde{x})$ darstellt:

$$Q(\tilde{x}) \equiv \frac{\overline{P}(\epsilon,\omega)}{P(\omega)|_{\sin\,\alpha=1}} = \frac{1}{2F(\tilde{x})}\int_{-1}^{1} d\mu\sqrt{1-\mu^2}F\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1-\mu^2}}\right). \tag{4.20}$$

Zur expliziten Berechnung von $Q(\tilde{x})$ bietet sich an, die Näherung $F(x) \approx 1.8x^{0.3}e^{-x}$ zu verwenden. Mit ihr ergibt sich der in Abbildung (4.2) gezeigte Funktionsgraph. Für $\tilde{x} \in [0,5]$ kann man $Q(\tilde{x})$ näherungsweise durch

$$Q(\tilde{x}) \approx 0.822533 - 0.181121\,\tilde{x} + 0.0370118\,\tilde{x}^2 - 0.00316623\,\tilde{x}^3 \tag{4.21}$$

ersetzen.

Bislang wurde vorausgesetzt, daß das Magnetfeld isotrop ist, d. h. auf der relevanten Längenskala keine ausgeprägte Richtung besitzt. Geht man statt dessen von der Annahme aus, daß das Magnetfeld homogen ist (und somit eine ausgezeichnete Richtung aufweist), hängt $A_{21}(\vec{p}, p')$ von der Richtung des Impulses $\vec{p}$ (bzw. genauer vom Pitchwinkel) ab. Dies bedeutet natürlich, daß im allgemeinen isotrope Verteilungen anisotrop werden, sofern nur Synchrotronprozesse vorliegen. Im folgenden sei jedoch angenommen, daß (infolge elastischer Streuung) die Isotropie der Verteilungen gewährleistet bleibt. Dann bleibt die Herleitung der kinetischen Gleichung (4.16) für die Photonen richtig, falls man den Einstein-Koeffizienten $A_{21}(p, k)$ durch den winkelgemittelten Koeffizienten $\overline{A}_{21}(p, k)$ mit

$$\overline{A}_{21}(p,k) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega_p A_{21}(\vec{p}, k) \tag{4.22}$$

ersetzt. Analog behält die Herleitung der kinetischen Gleichung (4.18) ihre Gültigkeit, sofern man den Koeffizienten $A_{21}(p, p')$ durch den (wie in Gleichung (4.22) definierten) winkelgemittelten Koeffizienten $\overline{A}_{21}(p, p')$ und (in den Gleichungen, in denen $A_{21}(p, p')$ vorkommt) auf der linken Seite $\frac{f(p)}{\partial t}$ durch $\frac{\partial f(p)}{\partial t}$ ersetzt und die Integrale mit $4\pi p^2$ multipliziert. Die winkelgemittelten Einstein-Koeffizienten führen aber jeweils zur winkelgemittelten Emissivität, so daß man wieder exakt die Gleichungen (4.16) bzw. (4.18) erhält. Es ist also für die kinetischen Gleichungen vollkommen irrelevant, ob das Magnetfeld keine oder eine (einzige) ausgezeichnete Richtung besitzt.
Ebenso läßt sich noch die Voraussetzung einer isotropen Photonenverteilung abschwächen: Im Falle einer isotropen Elektronenverteilung und eines isotropen Magnetfeldes spielt es für die Absorption und die stimulierte Emission keine Rolle, in welche Richtung sich die Photonen bewegen, d. h. die Gesamtzahl dieser beiden Prozesse ist unabhängig von der speziell gewählten Winkelverteilung der Photonen. Da dies aber trivialerweise erst recht auf die spontane Emission zutrifft, ergibt sich insgesamt, daß die kinetischen Gleichungen (bei Isotropie der Elektronenverteilung und des Magnetfeldes) unabhängig davon gelten, ob die Photonenverteilung isotrop ist oder nicht.

4.2 Einfache stationäre Lösungen

Während in der bisherigen Diskussion die „normalen“ Verteilungsfunktionen $W(\omega)$ und $f(\epsilon)$ verwendet wurden, werden im folgenden ihre „zustandsnormierten“ Pendants $\Omega(\omega) = \frac{W(\omega)}{\omega^2}$ und $\varphi(\epsilon) = \frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}$ benutzt. Mit diesen gehen die kinetischen Gleichungen (4.16) für die Photonen und (4.18) für die Elektronen über in

$$\frac{\partial(\omega^2\Omega(\omega))}{\partial t} = \int d\epsilon \epsilon^2 \overline{P}(\epsilon,\omega) \left\{ \varphi(\epsilon) + \pi^2 c^3 \Omega(\omega) \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right\} \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial(\epsilon^2\varphi(\epsilon))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int d\omega \epsilon^2 \overline{P}(\epsilon,\omega) \left\{ \varphi(\epsilon) + \pi^2 c^3 \Omega(\omega) \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right\} . \tag{4.24}$$

Die Form dieser Gleichungen legt es nahe, eine Funktion (bzw. genauer ein Funktional) $S(\epsilon, \omega)$ einzuführen durch

$$S(\epsilon,\omega) \equiv \epsilon^2 \overline{P}(\epsilon,\omega) \left\{ \varphi(\epsilon) + \pi^2 c^3 \Omega(\omega) \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right\} , \tag{4.25}$$

so daß sich die kinetischen Gleichungen schreiben lassen als

$$\frac{\partial(\omega^2\Omega(\omega))}{\partial t} = \int d\epsilon S(\epsilon,\omega) \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial(\epsilon^2\varphi(\epsilon))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\int d\omega S(\epsilon,\omega). \tag{4.27}$$

Es sollen nun stationäre Lösungen gesucht werden (vgl. hierzu Norman 1974); d. h. es gelte $\frac{\partial(\omega^2\Omega(\omega))}{\partial t} = 0 = \frac{\partial(\epsilon^2\varphi(\epsilon))}{\partial t}$ und somit

$$\int d\epsilon S(\epsilon,\omega) = 0 = \frac{d}{d\epsilon}\int d\omega S(\epsilon,\omega). \tag{4.28}$$

Der einfachste Lösungsansatz für diese Gleichung besteht offensichtlich darin, $S(\epsilon,\omega) \equiv 0$ zu setzen. In diesem Fall folgt

$$\varphi(\epsilon) + \pi^2 c^3 \Omega(\omega)\frac{d\varphi(\epsilon)}{d\epsilon} \equiv 0. \tag{4.29}$$

Da diese Beziehung für alle ϵ unabhängig vom speziellen Wert von ω erfüllt sein muß, folgt hieraus unmittelbar, daß $\Omega(\omega) \equiv \Omega_0$ mit einer beliebigen Konstanten Ω_0 sein muß. Damit ergibt sich für φ die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi(\epsilon)}{d\epsilon} = -\frac{1}{\pi^2 c^3 \Omega_0}\varphi(\epsilon), \tag{4.30}$$

die die Lösung

$$\varphi(\epsilon) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{\epsilon}{\pi^2 c^3 \Omega_0}\right) \tag{4.31}$$

besitzt. Für $W(\omega)$ und $f(\epsilon)$ erhält man somit

$$f(\epsilon) = \varphi_0 \epsilon^2 \exp\left(-\frac{\epsilon}{\pi^2 c^3 \Omega_0}\right) \tag{4.32}$$

$$W(\omega) = \Omega_0 \omega^2, \tag{4.33}$$

d. h. (für $\Omega_0 > 0$) die Boltzmann- bzw. die Wien-Verteilung. (Der Faktor ϵ^2 ist als statistisches Gewicht zu deuten. Man erhält die Wien- (und nicht die Planck-)Verteilung, da die Energie der emittierten Photonen viel kleiner als die der Elektronen ist (Rybicki 1979).) Das thermodynamische Gleichgewicht stellt also unabhängig von der Emissivität eine Lösung der kinetischen Gleichungen dar.
Um eine weitere stationäre Lösung angeben zu können, hält man zunächst fest, daß sich die winkelgemittelte Emissivität $\overline{P}(\epsilon,\omega)$ als Funktion $\overline{P}(\tilde{x})$ mit

$$\tilde{x} = \frac{\omega}{\omega_c|_{\sin\alpha=1}} = \frac{2mc}{3\gamma^2 qB}\omega = \frac{2m^3c^5}{3qB}\frac{\omega}{\epsilon^2} \equiv K\frac{\omega}{\epsilon^2} \tag{4.34}$$

auffassen läst. Damit kann man die Momente von $\overline{P}(\epsilon,\omega)$ bezüglich ϵ und ω mit der Definition

$$G(\mu) \equiv \int_0^\infty d\tilde{x}\overline{P}(\tilde{x})\tilde{x}^\mu \tag{4.35}$$

wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d\epsilon \overline{P}(\epsilon,\omega)\epsilon^\mu &= \int_\infty^0 d\tilde{x}\left(-\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{2}}\tilde{x}^{-\frac{3}{2}}\right)\overline{P}(\tilde{x})[(K\omega\tilde{x}^{-1})^{\frac{1}{2}}]^\mu \\
&= \frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}}\int_0^\infty d\tilde{x}\overline{P}(\tilde{x})\tilde{x}^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}}G(-\frac{1}{2}\mu-\frac{3}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d\omega \overline{P}(\epsilon,\omega)\omega^\mu &= \int_0^\infty d\tilde{x}\left(\frac{1}{K}\epsilon^2\right)\overline{P}(\tilde{x})[K^{-1}\epsilon^2\tilde{x}]^\mu \\
&= K^{-\mu-1}\epsilon^{2\mu+2}\int_0^\infty d\tilde{x}\overline{P}(\tilde{x})\tilde{x}^\mu \\
&= K^{-\mu-1}\epsilon^{2\mu+2}G(\mu).
\end{aligned}$$

Da gemäß der Gleichungen (4.20) und (2.48) $\overline{P}(\tilde{x}) \sim Q(\tilde{x})F(\tilde{x})$ mit $Q(0) \neq 0$ gilt, folgt analog zur Diskussion im Anschluß an Gleichung (2.45), daß das Integral $\int_0^\infty d\tilde{x}\overline{P}(\tilde{x})\tilde{x}^\mu$ für $\mu \leq -\frac{4}{3}$ divergiert. In der Momentengleichung für ϵ muß also $-\frac{1}{2}\mu - \frac{3}{2} > -\frac{4}{3}$ und somit $\mu < -\frac{1}{3}$, in der Momentengleichung für ω dagegen $\mu > -\frac{4}{3}$ sein.
Es sei nun als stationärer Lösungsansatz für die Elektronenverteilung $\varphi(\epsilon) = \varphi_0\epsilon^\alpha$ gewählt. Dann ergibt sich aus Gleichung (4.23) für eine stationäre Photonenverteilung

$$\begin{aligned}
\Omega(\omega) &= -\frac{\int d\epsilon\epsilon^2\overline{P}(\epsilon,\omega)\varphi(\epsilon)}{\int d\epsilon\epsilon^2\overline{P}(\epsilon,\omega)\pi^2c^3\frac{d\varphi(\epsilon)}{d\epsilon}} = -\frac{1}{\alpha\pi^2c^3}\frac{\int d\epsilon\overline{P}(\epsilon,\omega)\epsilon^{\alpha+2}}{\int d\epsilon\overline{P}(\epsilon,\omega)\epsilon^{\alpha+1}} \\
&= -\frac{1}{\alpha\pi^2c^3}\frac{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}(\alpha+2)+\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{2}(\alpha+2)+\frac{1}{2}}G(-\frac{1}{2}(\alpha+2)-\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}(\alpha+1)+\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{2}(\alpha+1)+\frac{1}{2}}G(-\frac{1}{2}(\alpha+1)-\frac{3}{2})} \\
&= -\frac{\sqrt{K}}{\alpha\pi^2c^3}\frac{G(-\frac{1}{2}\alpha-\frac{5}{2})}{G(-\frac{1}{2}\alpha-2)}\omega^{\frac{1}{2}} \equiv \Omega_0\omega^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

mit

$$\Omega_0 \equiv -\frac{\sqrt{K}}{\alpha\pi^2c^3}\frac{G(-\frac{1}{2}\alpha-\frac{5}{2})}{G(-\frac{1}{2}\alpha-2)}. \tag{4.36}$$

Die Existenz der auftretenden Integrale ist gemäß der obigen Diskussion genau dann gegeben, falls $\alpha + 2 < -\frac{1}{3}$ bzw. $\alpha + 1 < -\frac{1}{3}$ erfüllt ist. Es muß also insgesamt $\alpha < -\frac{7}{3}$ gelten. Setzt man nun die so gewonnene Verteilungsfunktion $\Omega(\omega)$ in Gleichung (4.28) für die Elektronen ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\epsilon}\int d\omega S(\epsilon,\omega) = \frac{d}{d\epsilon}\int d\omega\epsilon^2\overline{P}(\epsilon,\omega)\left\{\varphi(\epsilon) + \pi^2c^3\Omega(\omega)\frac{d\varphi(\epsilon)}{d\epsilon}\right\} \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\left(\varphi_0\epsilon^{\alpha+2}\int d\omega\overline{P}(\epsilon,\omega) + \pi^2c^3\Omega_0\alpha\varphi_0\epsilon^{\alpha+1}\int d\omega\overline{P}(\epsilon,\omega)\omega^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \varphi_0(\alpha+4)\epsilon^{\alpha+3}K^{-1}G(0) + \pi^2c^3\Omega_0\alpha\varphi_0(\alpha+4)\epsilon^{\alpha+3}K^{-\frac{3}{2}}G(\frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Die Integrale existieren, da sowohl 0 als auch $\frac{1}{2}$ größer als $-\frac{4}{3}$ sind. Zusammen mit Formel (4.36) ergibt sich somit die Forderung

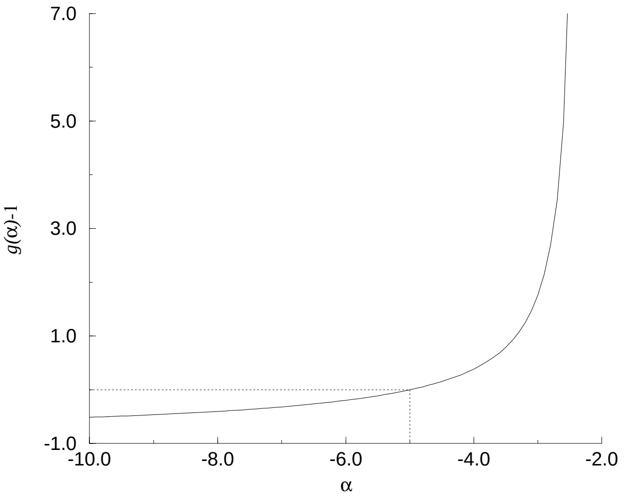

Abbildung 4.3: Die Funktion $g(\alpha) - 1$ mit der Näherung (4.21). Die Nullstelle liegt bei $\alpha = -5$.

$$1 \stackrel{!}{=} -\pi^2 c^3 \Omega_0 \alpha \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{G(\frac{1}{2})}{G(0)} = \frac{G(\frac{1}{2})}{G(0)} \frac{G(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{5}{2})}{G(-\frac{1}{2}\alpha - 4)} \equiv g(\alpha). \tag{4.37}$$

Der Graph der Funktion $g(\alpha) - 1$ (mit der Näherung (4.21) und $F(x) \approx 1.8x^{0.3}e^{-x}$) ist der Abbildung (4.3) zu entnehmen. Für negative α weist er offenbar nur eine Nullstelle auf, die (wie man durch Einsetzen leicht zeigt) bei $\alpha = -5$ liegt. Für positive α dagegen gibt es anscheinend unendlich viele Nullstellen, die jedoch nicht relevant sind, da oben gezeigt wurde, daß $\alpha < -\frac{7}{3}$ gelten muß. Insgesamt ergibt sich als stationäre Lösung somit für die Photonenverteilung $\Omega(\omega) = \Omega_0\sqrt{\omega}$ bzw. $W(\omega) = \Omega_0\omega^{5/2}$ und für die Elektronenverteilung $\varphi(\epsilon) = \varphi_0\epsilon^{-5}$ bzw. $f(\epsilon) = \varphi_0\epsilon^{-3}$, wobei Ω_0 (gemäß der Definitionen von Ω_0 und K) durch

$$\Omega_0 = \frac{1}{5\pi^2}\sqrt{\frac{2m^3}{3cqB}} \tag{4.38}$$

gegeben und φ_0 beliebig ist. Das Photonenspektrum stellt hierbei also gerade das einer optisch dicken Quelle dar. Abschließend sei noch kurz die Delta-Approximation für die Übergangswahrscheinlichkeit (Mastichiadis 1994, Hoyle 1960) diskutiert: Bei dieser wird die Synchrotronstrahlung einer Ladung als monochromatisch aufgefaßt, d. h. die Übergangswahrscheinlichkeit wird durch eine Deltafunktion ersetzt. In diesem Fall kann man für das (winkelgemittelte) Spektrum $\overline{P}(\epsilon, \omega)$ die Form

$$\overline{P}(\epsilon, \omega) = P_0(\epsilon)\delta(\omega - \omega_0(\epsilon)) \tag{4.39}$$

ansetzen, wobei die Funktionen $P_0(\epsilon)$ und $\omega_0(\epsilon)$ durch zwei physikalische Forderungen festzulegen sind. Dazu bietet sich zunächst an, zu verlangen, daß die Delta-Approximation die richtige (winkelgemittelte) Gesamtemission $\overline{P}(\epsilon)$ liefert. Aus Gleichung (2.38) mit $\beta_\perp = \beta \sin\alpha$, $\beta \approx 1$ und $\langle \sin^2\alpha \rangle = \frac{2}{3}$ ergibt sich dann

$$P_0(\epsilon) = \int d\omega P_0(\epsilon)\delta(\omega - \omega_0(\epsilon)) = \overline{P}(\epsilon) = \frac{2}{3} r_0^2 c \langle \beta_\perp^2 \rangle \left(\frac{\epsilon}{mc^2}\right)^2 B^2 = \left(\frac{2r_0 B}{3mc^2}\right)^2 c\epsilon^2 \equiv D_1\epsilon^2.$$

Zudem sei $\omega_0(\epsilon)$ proportional zu ϵ^2, so daß $\omega_0(\epsilon) = D_2\epsilon^2$ mit einer Konstanten D_2 ist. Die physikalische Rechtfertigung dieser zweiten Forderung besteht darin, daß ϵ^2 und die Frequenz des Maximums beim Synchrotronspektrum ebenfalls einer solchen Proportionalitätsbeziehung genügen. Insgesamt erhält man auf diese Weise für die spektrale Leistung also die Form $\overline{P}(\epsilon,\omega) \approx D_1\epsilon^2\delta(\omega - D_2\epsilon^2)$. Es sei nun ein beliebiges stationäres Elektronenspektrum $\varphi(\epsilon)$ angesetzt. In diesem Fall ergibt sich für ein stationäres Photonenspektrum aus (4.23) die Beziehung

$$\begin{aligned}
\Omega(\omega) &= -\frac{\int d\epsilon\epsilon^2\overline{P}(\epsilon,\omega)\varphi(\epsilon)}{\int d\epsilon\epsilon^2\overline{P}(\epsilon,\omega)\pi^2c^3\frac{d\varphi(\epsilon)}{d\epsilon}} \stackrel{(*)}{=} -\frac{\int du\frac{1}{2\sqrt{D_2}\sqrt{u}}D_1\left(\frac{u}{D_2}\right)^2\varphi\left(\sqrt{\frac{u}{D_2}}\right)\delta(\omega-u)}{\int du\frac{1}{2\sqrt{D_2}\sqrt{u}}D_1\left(\frac{u}{D_2}\right)^2\pi^2c^3\varphi'\left(\sqrt{\frac{u}{D_2}}\right)\delta(\omega-u)} \\
&= -\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\varphi\left(\sqrt{\frac{\omega}{D_2}}\right)}{\varphi'\left(\sqrt{\frac{\omega}{D_2}}\right)},
\end{aligned}$$

wobei bei der Umformung $(*)$ die Variablensubstitution $u = D_2\epsilon^2$ verwendet wurde. Setzt man für $\varphi(\epsilon)$ die Wien-Verteilung an, erhält man $\Omega(\omega) \equiv \text{const}$, setzt man ein Potenzspektrum an, ergibt sich $\Omega(\omega) \sim \sqrt{\omega}$, wie es ja auch zu erwarten ist. Mit dem eben gewonnenen Ausdruck für $\Omega(\omega)$ folgt nun für Gleichung (4.24)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\epsilon}\left(d\omega\overline{P}(\epsilon,\omega)\left\{\varphi(\epsilon) + \pi^2c^3\Omega(\omega)\frac{d\varphi(\epsilon)}{d\epsilon}\right\}\right) \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\left(\int d\omega\epsilon^2D_1\epsilon^2\delta(\omega - D_2\epsilon^2)\left\{\varphi(\epsilon) - \pi^2c^3\frac{\varphi\left(\sqrt{\frac{\omega}{D_2}}\right)}{\pi^2c^3\varphi'\left(\sqrt{\frac{\omega}{D_2}}\right)}\varphi'(\epsilon)\right\}\right) \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\left(D_1\epsilon^4\left\{\varphi(\epsilon) - \pi^2c^3\frac{\varphi(\epsilon)}{\pi^2c^3\varphi'(\epsilon)}\varphi'(\epsilon)\right\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung ist also für jede beliebige Elektronenverteilung erfüllt, sofern nur $\Omega(\omega)$ durch die vorletzte Gleichung gegeben ist. Demnach liefert die Delta-Approximation zwar die richtigen Photonenverteilungen für Wien-Verteilungen und Potenzspektren, läßt aber die Elektronenverteilung völlig unbestimmt. Letzteres steht im Widerspruch dazu, daß für das Elektronenspektrum nur der Spektralindex $\alpha = -5$ in Frage kommt. Insofern ist die Delta-Approximation nur mit Vorsicht zu verwenden.

Kapitel 5

Fermibeschleunigung

5.1 Teilchenbeschleunigung und Energieerhaltung

Um das Grundprinzip der Teilchenbeschleunigung zu erläutern, sei als Beispiel (wie in Abbildung (5.1) gezeigt) ein ideal leitendes Plasma betrachtet, das in seinem Ruhesystem gerade die Halbebene mit $x > 0$ ausfüllt und das sich im Laborsystem mit der Geschwindigkeit $\vec{V} = -V\vec{e}_1$ parallel zur x-Achse bewegt. Aufgrund der idealen Leitfähigkeit des Plasmas verschwindet in seinem Ruhesystem das elektrische Feld, so daß nur ein Magnetfeld verbleibt, das homogen sei und in Richtung der z-Achse weise.
Eine in x-Richtung in dieses Plasma eintretende Ladung q der Masse m vollführt offensichtlich im Ruhesystem einen Halbkreis, bevor sie in negativer x-Richtung wieder austritt. Für die quantitative Diskussion dieser Bewegung sei im folgenden der Einfachheit halber nur der nichtrelativistische Grenzfall untersucht. Hierbei sei das Laborsystem das ungestrichene, das Ruhesystem (des Plasmas) dagegen das gestrichene System. Bezeichnet dann v_i die Geschwindigkeit der Ladung vor dem Eintritt ins Plasma, so gilt für ihren Impuls offensichtlich

$$\vec{p}_\mathrm{i} = mv_\mathrm{i}\vec{e}_1 \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}\,'_\mathrm{i} = m(v_\mathrm{i} + V)\vec{e}_1. \tag{5.1}$$

Da ein Magnetfeld die kinetische Energie (und somit auch den Impulsbetrag) unverändert läßt, folgt hieraus für den Impuls nach Austritt aus dem Plasma

$$\vec{p}\,'_\mathrm{f} = -\vec{p}\,'_\mathrm{i} = m(-v_\mathrm{i} - V)\vec{e}_1 \tag{5.2}$$

bzw. im Laborsystem

$$\vec{p}_\mathrm{f} = \vec{p}\,'_\mathrm{f} - mV\vec{e}_1 = m(-v_\mathrm{i} - 2V)\vec{e}_1. \tag{5.3}$$

Die kinetische Energie W_f der ausgetretenen Ladung hat also den Wert

$$W_\mathrm{f} = \frac{p_\mathrm{f}^2}{2m} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 + 2mVv_\mathrm{i} + 2mV^2. \tag{5.4}$$

Vor dem Eintritt beträgt die kinetische Energie dagegen $W_\mathrm{i} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2$. Daher ergibt sich

$$W_\mathrm{f} - W_\mathrm{i} = 2mVv_\mathrm{i} + 2mV^2 = 2mV(v_\mathrm{i} + V) > 0. \tag{5.5}$$

Die Energie der austretenden ist somit größer als die der eintretenden Ladung. Auf den ersten Blick ist das verblüffend, da ja während der eben durchgeführten Diskussion an keiner Stelle

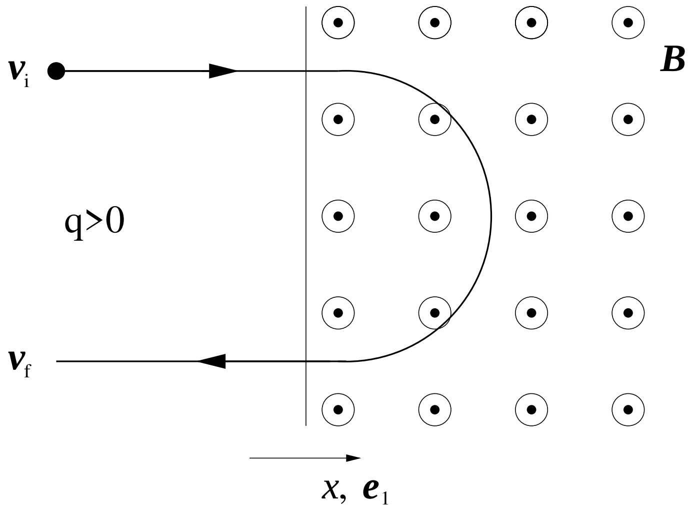

Abbildung 5.1: Bewegung einer positiven Ladung im Ruhesystem des Plasmas.

von einer Energiezufuhr die Rede war. Woher jedoch kommt die auf diese Weise gewonnene Energie?
Die Antwort auf diese Frage ergibt sich, wenn man bedenkt, daß nur für das Ruhesystem das Verschwinden des elektrischen Feldes gefordert wurde. Aufgrund der Transformation $\vec{E} = \gamma(\vec{E}' - \vec{\beta} \times \vec{B}')$ mit $\vec{\beta} \equiv \frac{1}{c}\vec{V}$ (und hier $\gamma = 1$) des elektrischen Feldes ergibt sich im Laborsystem jedoch ein Feld der Stärke $E = \beta B'$ in negative y-Richtung. Da der Radius des von der Ladung beschriebenen Halbkreises durch

$$r' = \frac{mcv_\mathrm{i}'}{qB'} = \frac{mc(v_\mathrm{i} + V)}{qB'}$$

gegeben ist (wie man sofort durch Gleichsetzen von Lorentz- und Zentripetalkraft zeigen kann) und die y-Koordinate bei der Transformation vom Ruhe- zum Laborsystem unverändert bleibt, gewinnt die Ladung q im Plasma demnach die Energie

$$\Delta W = 2r'qE = 2\frac{mc(v_\mathrm{i} + V)}{qB'}q\beta B' = 2mV(v_\mathrm{i} + V). \tag{5.6}$$

Es ergibt sich somit $\Delta W = W_\mathrm{f} - W_\mathrm{i}$, wie es ja auch zu erwarten war. Man macht sich ferner leicht klar, daß es im Falle einer Plasmabewegung in positive x-Richtung zu einer Energieerniedrigung um den selben Betrag ΔW kommt. Insgesamt ergibt sich, daß der unerwartete Energiegewinn bzw. -verlust darauf zurückzuführen ist, daß ein vorhandenes elektrisches Feld nicht explizit betrachtet wurde.
Für die eben skizzierte Teilchenbeschleunigung ist nur relevant, daß das zu beschleunigende Teilchen im Plasmaruhesystem seine Bewegungsrichtung umkehrt und dabei keine Energieänderung erfährt. Nebem dem hier diskutierten Fall der Bewegung in einem homogenen Magnetfeld, der einer Driftbeschleunigung entspricht, sind daher auch andere Mechanismen denkbar. So ist beispielweise als rein mechanisches Analogon die Reflexion eines Teilchens an einer bewegten Wand mit „unendlicher" Masse M zu nennen. (Das Ruhesystem des Plasmas entspricht hier dem der Wand. In diesem System ist der Energiegewinn ΔW der Wand durch $\Delta W = \frac{1}{2}M(\Delta V)^2 \sim \frac{1}{M}$ mit der zu $\frac{1}{M}$ proportionalen Geschwindigkeitsänderung ΔV gegeben. Für $M \longrightarrow \infty$ verschwindet er also. In einem Inertialsystem, in dem die Wand eine Geschwindigkeit V besitzt,

beträgt der Energiegewinn dagegen $\Delta W' = \frac{1}{2}M(V+\Delta V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 = MV\Delta V - \frac{1}{2}M(\Delta V)^2$ und hat somit einen endlichen Wert.) Als weiteres Beispiel sei die Reflexion eines Teilchens an einem „magnetischen Spiegel“ angeführt, wie er durch zusammenlaufende magnetische Feldlinien realisiert wird (Kuijpers 1996, Longair 1992). Für das folgende wichtig ist schließlich die Pitchwinkel-Streuung. Bei dieser liegt ein Magnetfeld mit zufälligen Fluktuationen vor. Entspricht die Längenskala der Fluktuationen dem Gyroradius eines Teilchens, so bewirken sie eine Änderung seines Pitchwinkels bezüglich des durchschnittlichen Feldes (Jokipii 1973, Longair 1992). Aufgrund der zufälligen Verteilung der Fluktuationen führt dies offenbar zu einer Diffusion. Hinsichtlich des Energiegewinns entspricht die Pitchwinkel-Streuung gerade dem oben diskutierten Beispiel eines homogenen Magnetfeldes. Dies schließt aber natürlich nicht aus, daß der Energieverlust des elektrischen Feldes durch das angekoppelte Plasma ersetzt wird. In diesem Fall kann man das System formal einer Wand mit unendlicher Masse gleichsetzen.

5.2 Beschleunigung an einer ebenen Schockfront

Im folgenden sei eine ebene Schockfront (Schockwelle) betrachtet, die sich in einem neutralen, ideal leitenden Plasma bewegt. Offensichtlich läßt sich dann das Plasma in einen (bereits geschockten) Downstream- und einen (noch nicht geschockten) Upstream-Bereich unterteilen. Hierbei seien Größen im Upstream-Bereich mit dem Index $_1$, Größen im Downstream-Bereich dagegen mit dem Index $_2$ bezeichnet. Ferner sei angenommen, daß die Größen innerhalb der beiden Bereiche jeweils konstant sind.[1]

Um die elektromagnetischen Felder in der Umgebung der Schockfront zu bestimmen, geht man zunächst vom Ruhesystem P_1 des Upstream-Plasmas aus. Während in diesem System das elektrische Feld aufgrund der idealen Leitfähigkeit identisch verschwindet, ist das Magnetfeld im allgemeinen von Null verschieden und weist einen beliebigen Winkel ϕ zur Schocknormalen auf. Bezeichnet $\vec{r}_{\mathrm{P}}(t)$ den (zeitabhängigen) Ortsvektor des Punktes P, in dem eine magnetische Feldlinie die Schockfront durchstößt, kann man nun durch $\vec{V}_B \equiv \dot{\vec{r}}_{\mathrm{P}}(t)$ formal die Geschwindigkeit $\vec{V}_{\mathrm{B}}$ dieses Durchstoßungspunktes P definieren. Da es sich bei dieser Geschwindigkeit nicht um eine physikalische Größe handelt, kann ihr Betrag durchaus die Lichtgeschwindigkeit c übersteigen. In diesem Fall spricht man von einem superluminaren, anderenfalls von einem subluminaren Schock. Man macht sich sofort klar, daß ein Schock mit $\phi = 0°$ stets sub-, ein Schock mit $\phi = 90°$ jedoch stets superluminar sein muß. Hier wird nur der subluminare Fall diskutiert. (Bezüglich der Diskussion superluminarer Schocks sei auf Drury (1983) und Kirk (1994) verwiesen.)

Wegen $V_B < c$ macht es bei subluminaren Schocks Sinn, in ein Bezugssystem S' zu transformieren, das sich mit $\vec{V}_B$ gegen P_1 bewegt. Zwischen den Feldern in P_1 und S' bestehen dann mit $\vec{\beta}_B \equiv \frac{\vec{V}_B}{c}$ die bekannten Beziehungen

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}\ ,\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta}_B \times \vec{B}) \tag{5.7}$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}\ ,\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta}_B \times \vec{E}), \tag{5.8}$$

wobei der Index $_\parallel$ die Komponente parallel und der Index $_\perp$ die Komponente senkrecht zu $\vec{V}_B$ bezeichnet. Da $\vec{E}_1$ verschwindet und $\vec{V}_B$ nach Konstruktion parallel zu $\vec{B}_1$ ist, erhält man hieraus unmittelbar $\vec{E}'_{1\parallel} = \vec{E}'_{1\perp} = \vec{0}$. Andererseits folgt aus der Gleichung (5.7) entsprechenden Rücktransformation

$$\vec{0} = \vec{E}_{1\perp} = \gamma(\vec{E}'_{1\perp} - \vec{\beta}_B \times \vec{B}'_1) = -\gamma\vec{\beta}_B \times \vec{B}'_1, \tag{5.9}$$

[1] Zur Diskussion der Schockbeschleunigung vgl. Bell (1978), Drury (1983) und Kirk (1994).

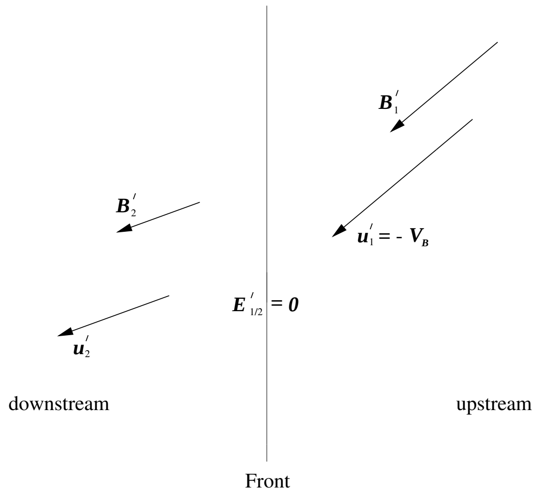

Abbildung 5.2: Subluminarer Schock im de Hoffmann/Teller-System.

so daß auch $\vec{B}_1'$ parallel zu $\vec{V}_B$ sein muß. Bezeichnet der Index $_\mathrm{S}$ die Komponente senkrecht, $_\mathrm{P}$ die Komponente parallel zur Schockfront, so folgt aus den beiden Maxwell-Gleichungen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ und $\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{0}$ für den stationären Fall $\vec{E}_{2\mathrm{P}}' = \vec{E}_{1\mathrm{P}}' = \vec{0}$ und $\vec{B}_{2\mathrm{S}}' = \vec{B}_{1\mathrm{S}}'$. Da zudem das elektrische Feld $\vec{E}_2''$ im Ruhesystem P_2'' des Downstream-Plasmas verschwindet und das Skalarprodukt $\vec{E}\vec{B}$ lorentzinvariant ist, ergibt sich somit

$$0 = \vec{E}_2''\vec{B}_2'' = \vec{E}_2'\vec{B}_2' = \vec{E}_{2\mathrm{S}}'\vec{B}_{2\mathrm{S}}' + \vec{E}_{2\mathrm{P}}'\vec{B}_{2\mathrm{P}}' = \vec{E}_{2\mathrm{S}}'\vec{B}_{1\mathrm{S}}'. \tag{5.10}$$

Wäre hierbei $\vec{B}_{1\mathrm{S}}' = \vec{0}$, so träfe dies aufgrund der Parallelität auch auf $\vec{V}_B$ zu. Damit aber wäre $\phi = 90°$ und der Schock demnach im Widerspruch zur Voraussetzung superluminar. Es gilt also $\vec{B}_{1S}' \neq \vec{0}$, so daß aus Gleichung (5.10) $\vec{E}_{2\mathrm{S}}' = \vec{0}$ folgt. Schließlich erhält man noch analog zu Gleichung (5.9) durch Ausnutzung des Verschwindens von $\vec{E}_{2\perp}''$, daß $\vec{B}_2'$ parallel zur Geschwindigkeit $\vec{u}_2'$ des Downstream-Plasmas ist. Das Bezugssystem S$'$, das de Hoffmann/Teller-System genannt wird, zeichnet sich somit insgesamt dadurch aus, daß zum einen das elektrische Feld überall verschwindet und zum anderen die Richtung des Magnetfeldes jeweils der der Plasmageschwindigkeit entspricht, wie es in Abbildung (5.2) verdeutlicht wird.
Im folgenden werden das de Hoffmann/Teller-System als das ungestrichene Bezugssystem S verwendet und die Ruhesysteme des Upstream- und Downstream-Plasmas einfach mit P_1 bzw. P_2 bezeichnet. Zudem sei der betrachtete Schock senkrecht, d. h. die Plasmageschwindigkeiten $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ (und damit auch die Magnetfelder $\vec{B}_1$ und $\vec{B}_2$) in S mögen senkrecht zur Schockfront stehen. Das Koordinatensystem sei für S so gewählt, daß der Halbraum mit $x < 0$ dem Downstream- und der Halbraum mit $x > 0$ dem Upstream-Plasma entspricht, wie es Abbildung (5.3) zeigt.
Die Idee einer Teilchenbeschleunigung an der Schockfront beruht nun darauf, daß ein beschleunigtes Teilchen mehrfach die Schockfront überquert und bei jedem Umlauf Energie gewinnt. Um diesen Mechanismus zufriedenstellend beschreiben zu können, sind offensichtlich drei Größen zu berechnen: Zum einen ist der durchschnittliche Energiegewinn ΔW pro Umlauf (d. h. pro zweifacher Überquerung der Schockfront) zu bestimmen. Zum anderen nuß die Wahrscheinlichkeit P_{esc} dafür angegeben werden, daß das Teilchen nicht wieder zur Schockfront zurückkehrt (und somit auch nicht weiter beschleunigt wird). Schließlich ist noch die mittlere Aufenthaltsdauer $\langle \Delta t \rangle$ pro Umlauf in einem Plasmabereich von Interesse.

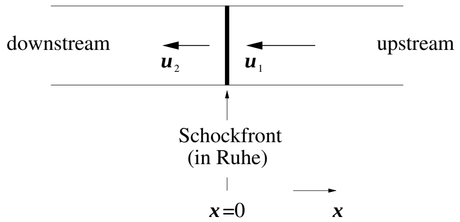

Abbildung 5.3: Schockfront, Upstream- und Downstream-Bereich eines senkrechten Schocks im de Hoffmann/Teller-System.

Es sei nun zunächst die Entweichwahrscheinlichkeit P_{esc} bestimmt, wobei hier wie auch im folgenden das Bezugssystem S verwendet und vorausgesetzt sei, daß bezüglich der beschleunigten Teilchen eine stationäre Verteilung vorliegt, die nur von der Koordinate x abhängt. Die spektrale Teilchendichte (d.h. die Zahl der Teilchen pro Volumen und Impuls) sei mit $n(x)$, die spektrale Teilchenzahl (d.h. das Integral von $n(x)$ über das jeweilige Plasmagebiet) mit N bezeichnet.

Eine Entweichwahrscheinlichkeit ist nun im Downstream-Bereich zu erwarten, da hier die Plasmageschwindigkeit von der (Schock-)Front weg weist. Es sei daher in diesem Bereich eine ruhende Fläche F im Abstand x_{F} zur Front eingeführt. Für den (spektralen) Teilchenfluß durch F in positive bzw. negative x-Richtung seien die Symbole $\dot{N}_{\text{F},+}$ bzw. $\dot{N}_{\text{F},-}$ verwendet. Ferner sei die Größe $P_{\text{F,ret}}(\Delta t)$ eingeführt, so daß $P_{\text{F,ret}}(\Delta t)dt$ gerade die Wahrscheinlichkeit angibt, daß ein Teilchen, das F zum Zeitpunkt t in positive Richtung durchquert, im Zeitintervall $[t+\Delta t, t+\Delta t+dt]$ F *erstmals*[2] wieder in negativer Richtung passiert. Ähnlich führt man die Größe $P_{\text{F},0}(x,t)$ ein, so daß $P_{\text{F},0}(x,t)dt$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt 0 am Ort x befindet, im Intervall $[t, t+dt]$ erstmals die Front in positive Richtung durchquert. Dann kann man den Fluß $\dot{N}_{\text{F},+}(t)$ ausdrücken durch

$$\begin{aligned}
\dot{N}_{\text{F},+}(t) &= \int_{-\infty}^{x_{\text{F}}} dx n_2(x) P_{\text{F},0}(x,t) + \int_0^t d\tau \dot{N}_{\text{F},-} P_{\text{F,ret}}(t-\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{x_{\text{F}}} dx n_2(x) P_{\text{F},0}(x,t) + \int_0^t d\tau \dot{N}_{\text{F},-} P_{\text{F,ret}}(\tau).
\end{aligned}$$

Der erste Term gibt hierbei jeweils den Fluß der Teilchen an, die zum Zeitpunkt 0 bereits im Downstream-Bereich sind. Der zweite Term dagegen beschreibt den Fluß der Teilchen, die nach dem Zeitpunkt 0 in den Downstream-Bereich gelangen. Hieraus wird offensichtlich, daß der erste Term für hinreichend große Zeiten keine Rolle mehr spielt. Im Limes $t \longrightarrow \infty$ erhält man daher

$$\dot{N}_{\text{F},+} = \int_0^\infty d\tau \dot{N}_{\text{F},-} P_{\text{ret,F}}(\tau) = \dot{N}_{\text{F},-} \int_0^\infty d\tau P_{\text{F,ret}}(\tau), \tag{5.11}$$

wobei noch die Stationarität der Flüsse ausgenutzt wurde. Das verbleibende Integral gibt den Anteil der Teilchen an, die F in negative Richtung durchqueren und wieder zurück kommen. Läßt man x_{F} gegen 0 gehen, muß es daher gerade $1 - P_{\text{esc}}$ entsprechen. Es folgt also $\dot{N}_{\text{F},+} = \dot{N}_{\text{F},-}(1 - P_{\text{esc}})$ und somit für die Entweichwahrscheinlichkeit im Downstream-Bereich

[2] Diese Forderung ist erforderlich, da anderenfalls bei Teilchen, die mehrere Umläufe vollführen, die selbe Überquerung der Schockfront mehrmals gezählt würde.

$$P_{\text{esc}} = 1 - \left.\frac{\dot{N}_{\text{F},+}}{\dot{N}_{\text{F},-}}\right|_{x_{\text{F}}=0} = \left.\frac{\dot{N}_{\text{F},-} - \dot{N}_{\text{F},+}}{\dot{N}_{\text{F},-}}\right|_{x_{\text{F}}=0}. \tag{5.12}$$

Im Upstream-Bereich dagegen verschwindet die Entweichwahrscheinlichkeit, da hier die Plasmageschwindigkeit in Richtung der Front weist. Es macht daher Sinn, in diesem Bereich eine mittlere Aufenthaltsdauer einzuführen. Um diese zu berechnen, bezeichnen $\dot{N}_+$ und $\dot{N}_-$ den Fluß durch die Front in den bzw. aus dem Upstream-Bereich. Zudem sei die Größe $P_{\text{ret}}(\Delta t)$ eingeführt, so daß $P_{\text{ret}}(\Delta t)dt$ die Wahrscheinlichkeit angibt, daß ein Teilchen, das zum Zeitpunkt t in den Upstream-Bereich eintritt, im Intervall $[t, t+\Delta t]$ erstmals wieder in den Downstream-Bereich zurückkehrt. Schließlich sei $P_0(x,t)$ so definiert, daß $P_0(x,t)$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß ein zum Zeitpunkt 0 am Ort x befindliches Teilchen im Intervall $[t, t+dt]$ erstmals den Upstream-Bereich verläßt. Analog zur Diskussion der Entweichwahrscheinlichkeit gilt dann

$$\begin{aligned}
\dot{N}_-(t) &= \int_0^\infty dx n_1(x) P_0(x,t) + \int_0^t d\tau \dot{N}_+ P_{\text{ret}}(t-\tau) \\
&= \int_0^\infty dx n_1(x) P_0(x,t) + \dot{N}_+ \int_0^t d\tau P_{\text{ret}}(\tau).
\end{aligned}$$

Es seien nun $F_{\text{ret}}(t)$ und $F_0(x,t)$ definiert durch

$$F_{\text{ret}}(t) \equiv \int_0^t d\tau P_{\text{ret}}(\tau) \tag{5.13}$$

$$F_0(x,t) \equiv \int_0^t d\tau P_0(x,\tau). \tag{5.14}$$

Mit dieser Definition kann man N_1 darstellen als

$$\begin{aligned}
N_1(t) &= N_1(0) + \dot{N}_+ t - \int_0^t d\tau \dot{N}_-(\tau) \\
&= \int_0^\infty dx n_1(x) + \dot{N}_+ t - \int_0^t d\tau \int_0^\infty dx n_1(x) P_0(x,\tau) - \dot{N}_+ \int_0^t d\tau F_{\text{ret}}(\tau) \\
&= \int_0^\infty dx n_1(x)[1 - F_0(x,t)] + \dot{N}_+ \int_0^t d\tau [1 - F_{\text{ret}}(\tau)],
\end{aligned}$$

wobei zum Teil die Stationarität der Flüsse verwendet wurde. Da im Upstream-Bereich die Entweichwahrscheinlichkeit verschwindet, gehen sowohl $F_0(t)$ als auch $F_{\text{ret}}(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ gegen 1, so daß für große Zeiten der erste Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden kann. Es sei nun der Einfachheit halber angenommen, daß P_{esc} einen endlichen Träger $[0,T]$ besitzt. Aus dem eben Gesagten folgt dann, daß für alle $t \geq T$ $F_{\text{ret}}(t) = 1$ gilt. Bezüglich $N_1(t)$ erhält man daher für $t \gg 0$

$$N_1(t) = \dot{N}_+ \int_0^t d\tau [1 - F_{\text{ret}}(\tau)] = \dot{N}_+ \int_0^T d\tau [1 - F_{\text{ret}}(\tau)] = \dot{N}_+ T - \dot{N}_+ \int_0^T d\tau F_{\text{ret}}(\tau)$$

Andererseits ergibt sich für die mittlere Aufenthaltsdauer im Upstream-Bereich

$$\begin{aligned}\langle\Delta t\rangle &\equiv \int_0^T d\tau\cdot\tau P_{\rm ret}(\tau) \overset{(*)}{=} [\tau F_{\rm ret}(\tau)]_0^T - \int_0^T d\tau F_{\rm ret}(\tau)\\ &\overset{(**)}{=} [T-0] - \int_0^T d\tau F_{\rm ret}(\tau) = \frac{1}{\dot N_+}\left\{\dot N_+ T - \dot N_+\int_0^T d\tau F_{\rm ret}(\tau)\right\}.\end{aligned}$$

Bei Umformung $(*)$ wurde hierbei partiell integriert; bei Umformung $(**)$ wurden die Beziehungen $F_{\rm ret}(0) = 0$ und $F_{\rm ret}(T) = 1$ benutzt. Vergleicht man die für $N_1(t) \equiv N_1$ und $\langle\Delta t\rangle$ erhaltenen Ausdrücke, so folgt unmittelbar

$$\langle\Delta t\rangle = \frac{N_1}{\dot N_+}. \tag{5.15}$$

Da bei der Herleitung dieser Formel ausgenutzt wurde, daß die Entweichwahrscheinlichkeit verschwindet, ist der Beweis nicht auf den Downstream-Bereich übertragbar. Dort liegt vielmehr eine unendliche Aufenthaltsdauer vor, da ja ein Teil der Teilchen entweicht.

Die mittlere Dauer, die ein Teilchen benötigt, um von der Front aus einen gewissen Abstand zu erreichen und anschließend zur Front zurückzukehren, hängt zwar von den Plasmaeigenschaften ab, nicht aber davon, ob sich das Plasma im Downstream- oder Upstream-Bereich befindet. In beiden Bereichen muß das Teilchen ja die selbe Entfernung mit der und gegen die Plasmageschwindigkeit diffundieren. Das bedeutet aber gerade, daß für die Teilchen, die nicht entweichen, die Aufenthaltsdauer als Funktion der Plasmaeigenschaften für den Upstream- und Downstream-Bereich identisch ist (Kirk 1994).

Es bleibt noch der mittlere Energiegewinn pro Umlauf zu berechnen. Dazu sei zum einen angenommen, daß sich der Upstream-, der Downstream-Bereich und die Schockfront geradlinig-gleichförmig bewegen und somit P_1, P_2 und S Inertialsysteme darstellen. Die Geschwindigkeit ΔU des Downstream-Plasmas in P_1 hat dann gemäß der relativistischen Geschwindigkeitsaddition den Wert

$$\Delta U = \frac{u_2 - u_1}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}}. \tag{5.16}$$

Zum anderen sei angenommen, daß ΔU klein gegen v und die Lichtgeschwindigkeit c ist und demnach $\left(\frac{\Delta U}{c}\right)^2$ vernachlässigt werden kann. Der zu ΔU gehörige Lorentzfaktor γ läßt sich dann approximieren durch

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{\Delta U}{c}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta U}{c}\right)^2 \approx 1. \tag{5.17}$$

Zunächst sei nun ein Teilchen der Masse m und Geschwindigkeit v in P_1 betrachtet, das das Upstream-Plasma unter dem Winkel ϑ_1 zur x-Achse in P_1 verläßt und unter dem Winkel $\bar\vartheta_1$ zurückkehrt, wie es Abbildung (5.4) verdeutlicht. Ferner gelte $\mu \equiv \cos\vartheta$ und $\bar\mu \equiv \cos\bar\vartheta$. Hat das Teilchen zu Beginn in P_1 die Energie W_1, so erhält man die entsprechende Energie W_2 in P_2 aus der bekannten speziell-relativistischen Transformationsformel:

$$W_2 = \gamma(W_1 - \Delta U\cdot p_{1\mathrm{x}}) = \gamma(W_1 + \mu_1 p_1 \Delta U). \tag{5.18}$$

Für die Impulskomponenten $p_{2\mathrm{x}}$, $p_{2\mathrm{y}}$ und $p_{2\mathrm{z}}$ ergibt sich dagegen

$$p_{2\mathrm{x}} = \gamma\left(p_{1\mathrm{x}} - \frac{W_1}{c^2}\Delta U\right)\ ,\ p_{2\mathrm{y}} = p_{1\mathrm{y}}\ ,\ p_{2\mathrm{z}} = p_{1\mathrm{z}}, \tag{5.19}$$

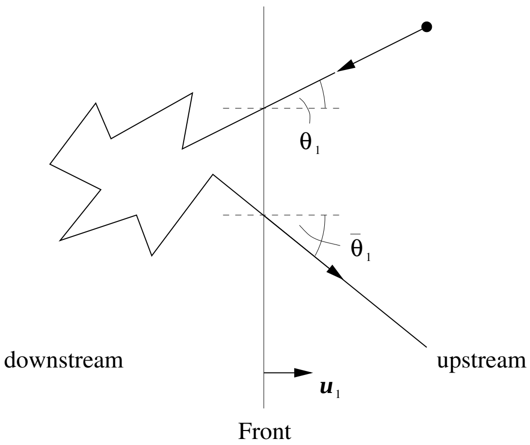

Abbildung 5.4: Umlauf eines Teilchens im Bezugssystem P_1 (nach Gaisser 1990).

woraus für den Impulsbetrag

$$p_2 = \sqrt{\gamma^2 \left(p_{1x} - \frac{W_1}{c^2}\Delta U\right)^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2} \tag{5.20}$$

folgt. Da P_2 das Ruhesystem des Downstream-Plasmas darstellt, verschwindet in ihm das elektrische Feld, so daß die Energie und der Impulsbetrag erhalten bleiben. Daher erhält man für die Energie $\bar{W}$ und den Impuls $\bar{p}$ bei Austritt aus dem Downstream-Bereich $\bar{W}_2 = W_2$ und $\bar{p}_2 = p_2$. Damit ergibt sich

$$\bar{W}_1 = \gamma(\bar{W}_2 + \bar{p}_2\bar{\mu}_2)\Delta U = \gamma(\gamma(W_1 + \mu_1 p_1 \Delta U) + \bar{\mu}\sqrt{\gamma^2 \left(p_{1x} - \frac{W_1}{c^2}\Delta U\right)^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2}\,\Delta U.$$

Wegen $\gamma \approx 1$, $W = \gamma_v mc^2$, $p = \gamma_v mv$ und $\Delta U \ll v$ folgt demnach

$$\frac{\bar{W}_1}{W_1} \approx 1 + \mu_1 \frac{v}{c^2}\Delta U + \bar{\mu}_2 \frac{1}{c^2}\sqrt{v^2 + 2\mu_1 v \Delta U + (\Delta U)^2}\Delta U \approx 1 + (\mu_1 + \bar{\mu}_2)\frac{v}{c^2}\Delta U. \tag{5.21}$$

Da sich die Energie analog zu P_2 auch in P_1 nicht ändert, entspricht $\bar{W}_1 - W_1$ dem Energiegewinn ΔW pro Umlauf. Daher gilt

$$\Delta W = (\mu_1 + \bar{\mu}_2)\frac{v}{c^2}\Delta U \cdot W_1. \tag{5.22}$$

Es seien nun N Teilchen in einem der beiden Plasma-Bereiche betrachtet, die die Schockfront (zu verschiedenen Zeiten) überqueren mögen. Faßt man die entsprechende Teilchenverteilung als kontinuierlich auf und geht davon aus, daß sich die Winkelverteilung n dieser Teilchen unabhängig von der noch im Plasma verbliebenen Teilchenzahl nicht ändert, macht man sich leicht klar, daß die Wahrscheinlichkeit, unter einem bestimmten Winkel auszutreten, proportional zum Produkt der Winkelverteilung und der Relativgeschwindigkeit von Teilchen und Front ist. Damit aber erhält man den mittleren Energiegewinn aus

$$\langle \Delta W \rangle = \frac{\int_{-\frac{|u_1|}{v}}^{1} d\mu_1\,(\mu_1 v + |u_1|)\,n_1(\mu_1) \int_{\frac{|u_1|}{v}}^{1} d\bar{\mu}_2\,(\bar{\mu}_2 v - |u_2|)\,n_2(\bar{\mu}_2)\Delta W}{\int_{-\frac{|u_1|}{v}}^{1} d\mu_1\,(\mu_1 v + |u_1|)\,n_1(\mu_1) \int_{\frac{|u_1|}{v}}^{1} d\bar{\mu}_2\,(\bar{\mu}_2 v - |u_2|)\,n_2(\bar{\mu}_2)}. \tag{5.23}$$

Der Zähler dient hierbei lediglich der Normierung. Nimmt man nun zusätzlich zu $\Delta U \ll v$ noch $|u_1| \ll v$ und $|u_2| \ll v$ an, so darf man $\frac{|u_1|}{v} \approx \frac{|u_2|}{v} \approx 0$ setzen. Mit $n_1(\mu_1) = n_2(\bar{\mu}_2) = \frac{1}{2}$ für eine isotrope Teilchenverteilung erhält man dann

$$\langle \Delta W \rangle \approx \frac{\displaystyle\int_0^1 d\mu_1 \int_0^1 d\bar{\mu}_2 \mu_1 \bar{\mu}_2 (\mu_1 + \bar{\mu}_2) \frac{v}{c^2} \Delta U \cdot W_1}{\displaystyle\int_0^1 d\mu_1 \mu_1 \int_0^1 d\bar{\mu}_2 \bar{\mu}_2} = \frac{4v\Delta U}{3c^2} W_1. \tag{5.24}$$

Damit sind für die drei zu untersuchenden Größen P_{esc}, $\langle \Delta t \rangle$ und $\langle \Delta W \rangle$ Formeln hergeleitet. Man beachte, daß die Beziehungen (5.12) für P_{esc} und (5.15) für $\langle \Delta t \rangle$ unabhängig davon gelten, ob nichtrelativistische oder relativistische Geschwindigkeiten vorliegen. Für die Gültigkeit von Gleichung (5.24) müssen dagegen $|u_1|$ und $|u_2|$ klein gegen v und c sein. Für Gleichung (5.23) genügt es, daß $\Delta U \ll c$ gilt. Bezüglich der Teilchengeschwindigkeit v gibt es jedoch (abgesehen von der Annahme, daß der Gyroradius der Teilchen größer als die Dicke der Schockfront ist) bei beiden Gleichungen keine Einschränkung.

5.3 Die Transportgleichung und ihre Lösung

Um aus den allgemeinen Formeln des vorhergehenden Abschnittes konkrete Ausdrücke zu erhalten, ist es erforderlich, eine Lösung für die Teilchenverteilung anzugeben. Im folgenden sei für den nichtrelativistischen Fall der Weg zu ihrer Gewinnung skizziert:[3] Man beginnt allgemein mit der exakten Phasenraumdichte

$$\mathcal{F}_i(\vec{x}, \vec{p}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\delta(\vec{p} - \vec{p}_i(t)) \tag{5.25}$$

des i-ten Teilchens in einem N-Teilchen-Plasma, wobei $\vec{x}_i(t)$ und $\vec{p}_i(t)$ Ort und Impuls des Teilchens darstellen. Es bezeichnen $\vec{v}_{\text{T}}(\vec{x}, \vec{p}, t)$ und $\vec{F}_{\text{T}}(\vec{x}, \vec{p}, t)$ die Geschwindigkeit eines Teilchens bzw. die Kraft auf ein Teilchen am Ort $\vec{x}$ mit dem Impuls $\vec{p}$. Dann ist die konvektive Zeitableitung im Phasenraum definiert durch

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{\text{T}} \vec{\nabla}_{\vec{x}} + \vec{F}_{\text{T}} \vec{\nabla}_{\vec{p}}, \tag{5.26}$$

und mit Hilfe der Beziehungen $\vec{v}_{\text{T}}(\vec{x}_i(t), \vec{p}_i(t), t) = \vec{v}_i(t) = \dot{\vec{x}}_i(t)$, $\vec{F}_{\text{T}}(\vec{x}_i(t), \vec{p}_i(t), t) = \dot{\vec{p}}_i(t)$ ergibt sich (vgl. Hasegawa 1989)

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{\text{T}}(\vec{x}, \vec{p}, t)\vec{\nabla}_{\vec{x}} + \vec{F}_{\text{T}}(\vec{x}, \vec{p}, t)\vec{\nabla}_{\vec{p}} \right) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\delta(\vec{p} - \vec{p}_i(t)) \\
&= -\dot{\vec{x}}_i(t)[\vec{\nabla}_{\vec{x}}\delta(\vec{x})]|_{\vec{x}-\vec{x}_i(t)}\delta(\vec{p} - \vec{p}_i(t)) - \dot{\vec{p}}_i(t)\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))[\vec{\nabla}_{\vec{p}}\delta(\vec{p})]|_{\vec{p}-\vec{p}_i(t)} \\
&\quad \underbrace{+ \, \vec{v}_{\text{T}}(\vec{x}, \vec{p}, t) \underbrace{[\vec{\nabla}_{\vec{x}}\delta(\vec{x})]|_{\vec{x}-\vec{x}_i(t)}}_{= 0 \text{ für } \vec{x} \neq \vec{x}_i(t)} \delta(\vec{p} - \vec{p}_i(t))}_{\underbrace{\vec{v}_{\text{T}}(\vec{x}_i(t), \vec{p}_i(t), t)}_{\dot{\vec{x}}_i(t)}[\vec{\nabla}_{\vec{x}}\delta(\vec{x})]\delta(\vec{p} - \vec{p}_i(t))} + \underbrace{\vec{F}_{\text{T}}(\vec{x}, \vec{p}, t)\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \underbrace{[\vec{\nabla}_{\vec{p}}\delta(\vec{p})]|_{\vec{p}-\vec{p}_i(t)}}_{= 0 \text{ für } \vec{p} \neq \vec{p}_i(t)}}_{\underbrace{\vec{F}_{\text{T}}(\vec{x}_i(t), \vec{p}_i(t), t)}_{\dot{\vec{p}}_i(t)}\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))[\vec{\nabla}_{\vec{p}}\delta(\vec{p})]} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

[3] Bezüglich der Transportgleichung und ihrer Lösung vgl. Drury (1983) und Kirk (1994).

Für die exakte Phasenraumdichte $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}_i(\vec{x},\vec{p},t)$ folgt hieraus mit $\vec{v}_{\mathrm{T}}(\vec{x},\vec{p},t) = \frac{\vec{p}}{m} \equiv \vec{v}$

$$0 = \frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}_{\vec{x}}\mathcal{F} + \vec{F}_{\mathrm{T}}(\vec{x},\vec{p},t)\vec{\nabla}_{\vec{p}}\mathcal{F}. \tag{5.27}$$

Da F_{T} gerade der Lorentzkraft entspricht, erhält man hieraus mit den exakten Felstärken $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{B}}$ des elektrischen Feldes bzw. des Magnetfeldes die Klimontovich-Dupree Gleichung:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}_{\vec{x}}\mathcal{F} + q\left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{\mathcal{B}}\right)\vec{\nabla}_{\vec{p}}\mathcal{F} = 0. \tag{5.28}$$

Führt man jetzt als über ein Ensemble gemittelte Größen die mittlere Phasenraumdichte $f(\vec{x},\vec{p},t) \equiv \langle \mathcal{F}(\vec{x},\vec{p},t)\rangle$ und die mittleren Feldstärken $\vec{E}(\vec{x},t) \equiv \langle \vec{\mathcal{E}}(\vec{x},t)\rangle$ und $\vec{B}(\vec{x},t) \equiv \langle \vec{\mathcal{B}}(\vec{x},t)\rangle$ ein und definiert die „Abweichfunktionen“ $\delta\mathcal{F} \equiv \mathcal{F} - f$, $\delta\vec{\mathcal{E}} \equiv \vec{\mathcal{E}} - \vec{E}$ und $\delta\vec{\mathcal{B}} \equiv \vec{\mathcal{B}} - \vec{B}$, ergibt sich somit wegen $\langle\delta\mathcal{F}\rangle = \langle\delta\vec{\mathcal{E}}\rangle = \langle\delta\vec{\mathcal{B}}\rangle = 0$ durch Mittelung der Klimontovich-Dupree Gleichung über ein Ensemble (Baumjohann 1996)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}_{\vec{x}}f + q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right)\vec{\nabla}_{\vec{p}}f = -q\left\langle \delta\vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\delta\vec{\mathcal{B}}\right\rangle. \tag{5.29}$$

Der Term auf der rechten Seite beschreibt offenbar eine Streuung. Verschwindet er, erhält man die Vlasov-Gleichung. Für eine gyrotrope Verteilung (d. h. eine Verteilung, die (abgesehen vom Ort) nur vom Impulsbetrag und vom Pitchwinkel α abhängt) steht der Gradient $\vec{\nabla}_{\vec{p}}f$ senkrecht auf der von $\vec{p}$ und $\vec{B}$ aufgespannten Ebene, so daß auf der linken Seite der Term $q\frac{1}{c}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{\nabla}_{\vec{p}}f$ verschwindet. Es sei nun angenommen, daß das Ruhesystem P des betrachteten Plasmas ein Inertialsystem darstellt und daß Pitchwinkel-Streuung vorliegt. In diesem Fall kann man für die Streuung den Term $\frac{\partial}{\partial\mu}\left(D_{\mu\mu}\frac{\partial f}{\partial\mu}\right)$ mit $\mu \equiv \cos\alpha$ ansetzen, und man erhält für eine gyrotrope Verteilung in P die Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}_{\vec{x}}f = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(D_{\mu\mu}\frac{\partial f}{\partial\mu}\right). \tag{5.30}$$

Nun ist es natürlich sinnvoller, eine Beschreibung bezüglich der Ortskoordinaten $\vec{x}'$ des Ruhesystems S der Schockfront zu wählen. Man führt daher durch

$$F(\vec{x}',\vec{p},t) \equiv f(\vec{x}' - \vec{u}t,\vec{p},t) = f(\vec{x},\vec{p},t) \tag{5.31}$$

mit der konstanten Plasmageschwindigkeit $\vec{u}$ in S die Phasenraumdichte F bezüglich der gemischten Koordinaten $\vec{x}'$ und $\vec{p}$ ein. Für diese gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\vec{u} + \frac{\vec{p}}{m}\right)\vec{\nabla}_{\vec{x}'}F = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(D_{\mu\mu}\frac{\partial F}{\partial\mu}\right). \tag{5.32}$$

Im folgenden wird statt $\vec{x}'$ einfach $\vec{x}$ verwendet. Es sei nun ein subluminarer senkrechter Schock im de Hoffmann/Teller-System betrachtet. Dann weisen sowohl $\vec{u}$ als auch $\vec{B}$ in x-Richtung. Unter der Annahme, daß F weder von y noch von z abhängt, folgt dann für den stationären Fall die Gleichung

$$\left(u + \frac{p\mu}{m}\right)\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(D_{\mu\mu}\frac{\partial F}{\partial\mu}\right). \tag{5.33}$$

Hieraus ergibt sich für eine in P isotrope Verteilung offensichtlich nur die triviale Lösung $F(x,p) \equiv \text{const.}$ Läßt man jedoch für $u \ll v$ in P eine leichte Anisotropie zu, d. h. sucht man eine Verteilung der Form $F(x,p,\mu) = F^{(0)}(x,p) + F^{(1)}(x,p,\mu)$ mit $F^{(1)}(x,p,\mu) \sim O\left(\frac{u}{v}\right)$, wobei der anisotrope Anteil $F^{(1)}(x,p,\mu)$ noch der Bedingung

$$\int_{-1}^{1} d\mu F^{(1)}(x,p,\mu) = 0 \tag{5.34}$$

genüge, so erfüllt der isotrope Anteil $F^{(0)}$ die Beziehung (Kirk 1994)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial F^{(0)}}{\partial x}\right) - u\frac{\partial F^{(0)}}{\partial x} = 0 \tag{5.35}$$

mit dem räumlichen Diffusionskoeffizienten

$$\kappa(x,p) = \frac{p^2}{8m^2}\int_{-1}^{1} d\mu \frac{(1-\mu^2)^2}{D_{\mu\mu}}. \tag{5.36}$$

Der anisotrope Anteil ist dagegen von der Form

$$F^{(1)} = C - \frac{p}{2m}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial x}\int_{-1}^{\mu} d\mu' \frac{1-\mu'^2}{D_{\mu'\mu'}} \tag{5.37}$$

mit einer Konstanten C (Kirk 1994). Weiter unten wird die Rechtfertigung für die Beschränkung auf fast isotrope Lösungen angeführt. Die allgemeine Lösung der Gleichung (5.35) ist gegeben durch

$$F^{(0)}(x,p) = A(p) + C(p)\exp\left(\int_0^x dx' \frac{u}{\kappa(x,p)}\right), \tag{5.38}$$

wobei $A(p)$ und $C(p)$ beliebige Funktionen darstellen. Nun gilt für den Upstream- und den Downstream-Bereich $u_1, u_2 < 0$ und $\kappa_1, \kappa_2 > 0$. Fordert man zum einen, daß die Downstream-Verteilung für $x \longrightarrow -\infty$ endlich bleibt, zum anderen, daß die Upstream-Verteilung für $x \longrightarrow \infty$ verschwindet, gilt daher $C_2(p) \equiv A_1(p) \equiv 0$, so daß sich insgesamt

$$F^{(0)}(x,p) = \begin{cases} C_1(p)\exp\left(\int_0^x dx' \frac{u_1}{\kappa_1(x',p)}\right) & , \ x > 0 \\ A_2(p) & , \ x < 0 \end{cases} \tag{5.39}$$

ergibt. Im de Hoffmann/Teller-System ist das Magnetfeld auf beiden Seiten der Schockfront identisch, und das elektrische Feld verschwindet. Daher kann ein subluminarer Schock die Verteilungsfunktion nicht ändern. Andererseits ist es naheliegend, daß die Änderung der Plasmaeigenschaften (Geschwindigkeit $u(x)$ und Diffusionskoeffizient $\kappa(x,p)$) die Verteilungsfunktion beeinflußt. Um diese Wirkung zu bestimmen, ersetzt man die Schockfront durch einen Übergangsbereich, in dem sich die Plasmaeigenschaften ändern und dessen Dicke im Limes gegen 0 geht. Zudem macht man die Annahme, daß die Anschlußbedingung unabhängig von der speziellen Form des Übergangs ist. (Anderenfalls wäre ja sowieso keine vernünftige Aussage möglich.) Es reicht daher, ein spezielles Beispiel zu untersuchen. Dazu sei für $u(x)$ und $\kappa(x,p)$ die Form

$$u(x) = \begin{cases} u_2 & , \ x \leq 0 \\ u_2 + u'x & , \ 0 < x < \Delta x \\ u_1 & , \ x \geq \Delta x \end{cases}$$

$$\kappa(x,p) = \begin{cases} \kappa_2(x,p) & , \quad x \leq -\Delta x \\ \kappa_0 + \frac{\kappa_0-\kappa_2(-\Delta x,p)}{\Delta x} x & , \quad -\Delta x < x < 0 \\ \kappa_0 & , \quad 0 \leq x \leq \Delta x \\ \kappa_0 + \frac{\kappa_1(x,p)-\kappa_0}{\Delta x}(x-\Delta x) & , \quad \Delta x \leq x < 2\Delta x \\ \kappa_1(x,p) & , \quad x \geq 2\Delta x \end{cases}$$

mit $0 \neq \kappa_0 \equiv \text{const}$ und $u' \equiv \frac{u_1-u_2}{\Delta x}$ gewählt. Man faßt den Übergangsbereich somit als Abfolge dreier Teilbereiche A ($x \in]-\Delta, 0[$), B ($x \in [0, \Delta x]$) und C ($x \in]\Delta x, 2\Delta x[$) auf, wobei in A der Diffusionskoeffizient in eine Konstante überführt wird, deren Wert er in B beibehält, während dort die Geschwindigkeit vom Downstream- in den Upstream-Wert übergeht. In C schließlich geht die Diffusionskonstante in ihren neuen Wert über. In A ist der isotrope Anteil $F^{(0)}(x,p)$ der Verteilungsfunktion durch Gleichung (5.35) festgelegt und demnach von der Form (5.38), so daß

$$F^{(0)}(-\Delta x,p) = A(p) + C(p)\exp\left(\int_0^{-\Delta x} \frac{u_2}{\kappa_0 + \frac{\kappa_0-\kappa_2(-\Delta x,p)}{\Delta x}x'}dx'\right) \tag{5.40}$$

gilt, wobei $A(p)$ und $C(p)$ geeignet zu wählen sind. Bezüglich des Integrals erhält man für $\kappa_2(-\Delta x,p) \neq \kappa_0$

$$\begin{aligned} \int_0^{-\Delta x} \frac{u_2}{\kappa_0 + \frac{\kappa_0-\kappa_2(-\Delta x,p)}{\Delta x}x'}dx' &= \left[\frac{u_2\Delta x}{\kappa_0 - \kappa_2(-\Delta x,p)} \ln\left(\kappa_0 + \frac{\kappa_0-\kappa_2(-\Delta x,p)}{\Delta x}x'\right)\right]_0^{-\Delta x} \\ &= \Delta x \cdot \frac{u_2}{\kappa_0 - \kappa_2(-\Delta x,p)}\left[\ln\kappa_2(-\Delta x,p) - \ln\kappa_0\right]. \end{aligned}$$

Im Limes $\Delta x \longrightarrow 0$ geht das Integral also gegen 0. (Dies trifft trivialerweise auch bei $\kappa_0 = \kappa_2(-\Delta x,p)$ zu.) Demnach erhält man die Beziehung $F^{(0)}(-\Delta x,p) \longrightarrow A(p)+C(p) = F^{(0)}(0,p)$. In B ist nun zu beachten, daß die Plasmageschwindigkeit nicht konstant bleibt. Man muß daher Gleichung (5.35) um einen zum Geschwindigkeitsgradienten proportionalen Term erweitern (Kirk 1994, Skilling 1975):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial F^{(0)}}{\partial x}\right) - u\frac{\partial F^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}p\frac{\partial F^{(0)}}{\partial p} = 0 \tag{5.41}$$

Mit $\kappa(x,p) = \kappa_0$, $u(x) = u_2 + u'x$ und dem Separationsansatz $F^{(0)}(x,p) = G(x)H(p)$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{d^2G_i}{dx^2} = \frac{u(x)}{\kappa_0}\frac{dG_i}{dx} + \frac{C_i}{\kappa_0}G_i \tag{5.42}$$

$$\frac{dH_i}{dp} = -\frac{3C_i}{u'p}H_i. \tag{5.43}$$

Die Separationskonstanten C_i seien hierbei so gewählt, daß jede Lösung als Linearkombination der Produkte $G_i(x)H_i(p)$ dargestellt werden kann. Mittels Separation der Variablen sieht man leicht, daß Gleichung (5.43) eine Potenzfunktion als Lösung hat. Gleichung (5.42) dagegen läßt sich mit der Vektorfunktion $\vec{v}_i(x) \equiv (G_i(x), G_i'(x))^{\mathrm{t}}$ schreiben als

$$\vec{v}_i'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{C_i}{\kappa_0} & \frac{u(x)}{\kappa_0} \end{pmatrix}\vec{v}_i(x) \equiv M(x)\vec{v}_i(x). \tag{5.44}$$

Hieraus ergibt sich mit $\vec{v}_{0,i} \equiv \vec{v}_i(x=0)$

$$\vec{v}_i(\Delta x) = \exp\left(\int_0^{\Delta x} M(x')dx'\right)\vec{v}_{0,i}. \tag{5.45}$$

Da aber $u(x) \in [u_1, u_2]$ beschränkt ist, gibt es ein $K > 0$, so daß $\|M(x)\| < K \ \forall x$ gilt. Damit aber folgt

$$\left\|\int_0^{\Delta x} M(x')dx'\right\| \longrightarrow 0 \ \text{ für } \Delta x \longrightarrow 0 \tag{5.46}$$

und demnach auch

$$\exp\left(\int_0^{\Delta x} M(x')dx'\right) \longrightarrow 1 \ \text{ für } \Delta x \longrightarrow 0. \tag{5.47}$$

Im Limes $\Delta x \longrightarrow 0$ konvergiert $\vec{v}_i(\Delta x)$ also gegen $\vec{v}_{0,i} = \vec{v}_i(0)$ bzw. $G_i(\Delta x)$ gegen $G_i(0)$. Da dies für alle G_i zutrifft, geht $F^{(0)}(-\Delta x, p)$ als Linearkombination für $\Delta x \longrightarrow 0$ gegen $F^{(0)}(0,p)$. In C schließlich gilt völlig analog zu A $F^{(0)}(\Delta x, p) \longrightarrow F^{(0)}(2\Delta x, p)$ für $\Delta x \longrightarrow 0$. Insgesamt erhält man somit

$$F^{(0)}(-\Delta x, p) \longrightarrow F^{(0)}(0,p) \longrightarrow F^{(0)}(\Delta x, p) \longrightarrow F^{(0)}(2\Delta x, p) \ \text{ für } \Delta x \longrightarrow 0. \tag{5.48}$$

In gemischten Koordinaten weist der isotrope Anteil der Verteilungsfunktion an der Schockfront also keine Unstetigkeit auf.[4] Hieraus folgt unmittelbar die Anschlußbedingung

$$C_1(p) = A_2(p). \tag{5.49}$$

Man macht sich nun leicht klar, daß die Beziehungen (5.12),(5.15) und (5.24) sowohl im Ruhesystem des jeweiligen Plasmas als auch in dem der Schockfront erfüllt sind. Der Einfachheit halber sei daher zur Berechnung von Entweichwahrscheinlichkeit, Aufenthaltsdauer und Energiegewinn jeweils das Ruhesystem des Plasmas gewählt. Ferner werde die Notation aus Abschnitt 5.2 verwendet. Dann ergibt sich zunächst für die (spektralen) Flüsse $\dot{N}_{\mathrm{F},-}$ und $\dot{N}_{\mathrm{F},+}$

$$\begin{aligned} \dot{N}_{\mathrm{F},-}(p_2) &= -\int_{-1}^{\frac{|u_2|}{v}} d\mu_2 2\pi p_2^2 F(x_\mathrm{F}, p_2, \mu_2)(\mu_2 v - |u_2|) \approx -2\pi p_2^2 \int_{-1}^{0} d\mu_2 F^{(0)}(x_\mathrm{F}, p_2)\mu_2 v \\ &= \pi p_2^2 A_2(p_2) v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{N}_{\mathrm{F},+}(p_2) &= \int_{\frac{|u_2|}{v}}^{1} d\mu_2 2\pi p_2^2 F(x_\mathrm{F}, p_2, \mu_2)(\mu_2 v - |u_2|) \approx 2\pi p_2^2 \int_{0}^{1} d\mu_2 F^{(0)}(x_\mathrm{F}, p_2)\mu_2 v \\ &= \pi p_2^2 A_2(p_2) v, \end{aligned}$$

wobei hier wie auch im folgenden nur die niedrigste Ordnung in $\frac{u}{v}$ berücksichtigt und die Schockfläche o. E d. A. auf 1 normiert wird. Da im Downstream-Bereich der Anteil $F_2^{(0)}$ der Verteilungsfunktion F_2 ortsunabhängig ist, folgt aus der Gleichung (5.37), daß der Anteil $F_2^{(1)}$ keine Winkelabhängigkeit aufweist. Für die Differenz aus $\dot{N}_{\mathrm{F},-}$ und $\dot{N}_{\mathrm{F},+}$ erhält man daher zusammen mit Gleichung (5.34)

[4] Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man die Stetigkeit der Verteilungsfunktion an der Schockfront fordert. Eine solche Forderung wird zwar dadurch nahegelegt, daß die Schockfront keine Diskontinuität darstellt; sie ist damit aber wohl nicht zu begründen. Vgl. Kirk (1994) und Drury (1983).

$$\begin{aligned}\dot{N}_{\mathrm{F},-}(p_2) - \dot{N}_{\mathrm{F},+}(p_2) &= -\int_{-1}^{1} d\mu_2 2\pi p_2^2 F(x_\mathrm{F}, p_2, \mu_2)(\mu_2 v - |u_2|) \approx 2\pi p_2^2 |u_2| \int_{-1}^{1} d\mu_2 F(\mu_2) \\ &\approx |u_2| \cdot 4\pi p_2^2 F^{(0)}(x_\mathrm{F}, p_2),\end{aligned}$$

woraus wegen $F^{(0)}(x_\mathrm{F} = 0, p_2) = A_2(p_2)$ für die Entweichwahrscheinlichkeit die Beziehung

$$P_\mathrm{esc} = \left.\frac{\dot{N}_{\mathrm{F},-}(p_2) - \dot{N}_{\mathrm{F},+}(p_2)}{\dot{N}_{\mathrm{F},-}(p_2)}\right|_{x_\mathrm{F}=0} = \frac{4|u_2|}{v} \tag{5.50}$$

folgt. Da der Fluß $\dot{N}_{\mathrm{F},+}$ in positive Richtung unabhängig von x ist, entspricht er offenbar dem Fluß $\dot{N}_+$ vom Downstream- in den Upstream-Bereich. Ferner gilt für ihn in niedrigster Ordnung $\dot{N}_{\mathrm{F},+}(p_2) = \dot{N}_{\mathrm{F},+}(p_1)$. Andererseits erhält man für die (vom Bezugssystem unabhängige) Gesamtzahl der Teilchen im Upstream-Bereich

$$\begin{aligned}N_1(p_1) &= \int_0^\infty dx 2\pi p_1^2 \int_{-1}^{1} d\mu F(x, p_1, \mu) \approx 4\pi p_1^2 \int_0^\infty dx F^{(0)}(x, p_1) \\ &= 4\pi p_1^2 \int_0^\infty dx C_1(p_1) \exp\left(\int_0^x dx' \frac{-|u_1|}{\kappa_1(x', p_1)}\right) \overset{(*)}{\equiv} 4\pi p_1^2 C_1(p_1) \frac{\langle\kappa_1(p_1)\rangle}{|u_1|},\end{aligned}$$

wobei die Forderung $(*)$ den räumlich gemittelten Diffusionskoeffizienten $\langle\kappa_1(p_1)\rangle$ definiert. Diese Definition ist sinnvoll, da für einen von x unabhängigen Koeffizienten $\kappa_1(x, p_1) \equiv \kappa_1(p_1)$ offensichtlich $\langle\kappa_1(p_1)\rangle = \kappa_1(p_1)$ gilt. Zusammen mit der Anschlußbedingung (5.49) ergibt sich für die mittlere Aufenthaltsdauer $\langle\Delta t\rangle$ somit der Wert

$$\langle\Delta t\rangle = \frac{N_1(p_1)}{\dot{N}_{\mathrm{F},+}(p_2)} \approx \frac{N_1(p_1)}{\dot{N}_{\mathrm{F},+}(p_1)} = \frac{4\langle\kappa_1(p_1)\rangle}{|u_1| v} \frac{C_1(p_1)}{A_2(p_1)} = \frac{4\langle\kappa_1(p_1)\rangle}{|u_1| v}. \tag{5.51}$$

Aus der Diskussion im Anschluß an Gleichung (5.15) folgt daher für die mittlere Dauer $\langle\Delta t_\mathrm{uml}\rangle$ eines Umlaufs, d. h. für die Summe der Aufenthaltsdauern im Upstream- und Downstream-Bereich die Beziehung

$$\langle\Delta t_\mathrm{uml}\rangle = \frac{4}{v}\left(\frac{\langle\kappa_1(p_1)\rangle}{|u_1|} + \frac{\langle\kappa_2(p_2)\rangle}{|u_2|}\right). \tag{5.52}$$

Die entscheidende Beobachtung besteht nun darin, daß bei der bislang durchgeführten Betrachtung die die Diffusion verursachenden Mechanismen als unabhängig von der Verteilung der Testteilchen angenommen wurden. (Anderenfalls wären $D_{\mu\mu}$ und somit auch κ abhängig von F.) Damit aber muß auch für die durch die Diffusion und die Plasmageschwindigkeiten festgelegten Größen, also insbesondere für die Entweichwahrscheinlichkeit, die Aufenthaltsdauer und den Energiegewinn, die speziell vorliegende Verteilung irrelevant sein. Gleichungen (5.50), (5.51) und (5.23) (nicht aber (5.24)!) gelten also ganz allgemein. Die Beschränkung auf eine fast isotrope Verteilung war demnach zulässig.

Kapitel 6

Kinetische Gleichungen II

6.1 Verallgemeinerung und Strahlungstransport

In Abschnitt 4.1 wurden die kinetischen Gleichungen für die Synchronstrahlung und Synchrotronselbstabsorption hergeleitet. Sie sollen nun um die im vorangegangenen Kapitel untersuchte Fermibeschleunigung erweitert werden. Dies kann man beispielsweise dadurch erreichen, daß man die Fermibeschleunigung eines Teilchens formal als Bewegung des Teilchens mit einer bestimmten Geschwindigkeit im (eindimensionalen) Energieraum auffaßt und auf diese die Kontinuitätsgleichung anwendet. Andererseits ist es aufgrund der statistischen Natur der Fermibeschleunigung nicht gerade suggestiv, dem Teilchen im Energieraum eine eindeutig bestimmte Geschwindigkeit zuzuordnen.
Aus diesem Grunde sei ein etwas anderer Ansatz gewählt, dessen Allgemeingültigkeit dadurch unterstrichen sei, daß zunächst eine Bewegung in einem beliebigen n-dimensionalen Raum R^n betrachtet wird. Üblicherweise wird eine Geschwindigkeit $\vec{v}$ als Grenzwert des Quotienten aus Orts- und Zeitdifferenz aufgefaßt. Sofern keine deterministische Bewegung vorliegt, ist es jedoch sinnvoller, den hierbei zugrunde liegenden Bahnbegriff aufzugeben und statt dessen zu einer Wahrscheinlichkeitsbeschreibung überzugehen. Dazu sei die Größe $P_t(\vec{x},\vec{x}',t')$ eingeführt, so daß für ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt t am Ort $\vec{x}$ befindet, $P_t(\vec{x},\vec{x}',t')d^nx'$ die Wahrscheinlichkeit angibt, zum Zeitpunkt t' im Volumenelement d^nx' um $\vec{x}'$ vorzuliegen. Ferner gelte $P_t(\vec{x},\vec{x}',t') \equiv \tilde{P}_t(\vec{x},\vec{x}'-\vec{x},t')$. Als „Geschwindigkeit“ des Teilchens läßt sich dann die Größe

$$\vec{v}(\vec{x},t) \equiv \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int d^ny\,\vec{y}\tilde{P}_t(\vec{x},\vec{y},t+h) \tag{6.1}$$

auffassen. Für die Teilchendichte $n(\vec{x},t)$ erhält man

$$n(\vec{x},t+h)d^nx = \int d^nx' n(\vec{x}',t)[P_t(\vec{x}',\vec{x},t+h)d^nx] = d^nx\int d^ny\,n(\vec{x}-\vec{y},t)\tilde{P}_t(\vec{x}-\vec{y},\vec{y},t+h).$$

Für ein gegebenes $\vec{x}$ kann $\tilde{P}_t(\vec{x},\vec{y},t+h)$ als normierte Funktion bei hinreichend kleinen Zeitdifferenzen h nur für $\vec{y}$ aus einer bestimmten Umgebung $U(\vec{0})$ um $\vec{0}$ signifikant von 0 verschieden sein. Es sei nun angenommen, daß sich sowohl $\tilde{P}_t(\vec{x}-\vec{y},\vec{y},t+h)$ in der ersten Variablen als auch $n(\vec{x}-\vec{y},t)$ als Funktion von $\vec{y}$ für $\vec{y}\in U(\vec{0})$ so langsam ändern, daß eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung gerechtfertigt ist. In diesem Fall folgt

$$n(\vec{x},t+h) = \int d^ny\{n(\vec{x},t)\tilde{P}_t(\vec{x},\vec{y},t+h) - \vec{y}\,\vec{\nabla}_{\vec{x}}[n(\vec{x},t)\tilde{P}(\vec{x},\vec{y},t+h)]\}$$

$$
\begin{aligned}
&= n(\vec{x},t)\int d^n y \tilde{P}_t(\vec{x},\vec{y},t) - \vec{\nabla}_{\vec{x}}\left\{n(\vec{x},t)\int d^n y\, \vec{y}\tilde{P}_t(\vec{x},\vec{y},t+h)\right\} \\
&= n(\vec{x},t) - \vec{\nabla}_{\vec{x}}\left\{n(\vec{x},t)\int d^n y\, \vec{y}\tilde{P}_t(\vec{x},\vec{y},t+h)\right\},
\end{aligned}
$$

wobei sich die letzte Umformung daraus ergibt, daß das Integral der Aufenthaltswahrscheinlichkeit über den gesamten R^n den Wert 1 hat. Zusammen mit Gleichung (6.1) erhält man somit

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n(\vec{x},t)}{\partial t} &= \lim_{h\to 0}\frac{n(\vec{x},t+h)-n(\vec{x},t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(-\vec{\nabla}_{\vec{x}}\left\{n(\vec{x},t)\int d^n y\, \vec{y}\tilde{P}_t(\vec{x},\vec{y},t+h)\right\}\right) \\
&= -\vec{\nabla}_{\vec{x}}\left\{n(\vec{x},t)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int d^n y\, \vec{y}\tilde{P}_t(\vec{x},\vec{y},t+h)\right\} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}}[n(\vec{x},t)\vec{v}(\vec{x},t)].
\end{aligned}
$$

Dies ist natürlich gerade die n-dimensionale Kontinuitätsgleichung. Im Falle der Fermibeschleunigung betrachtet man, wie oben angedeutet, den (eindimensionalen) Energieraum und verwendet als Näherung für $\vec{v}$ den aus dem mittleren Energiegewinn und der mittleren Aufenthaltsdauer gebildeten Quotienten. Damit gilt dann

$$
\left.\frac{\partial n(\epsilon)}{\partial t}\right|_{\mathrm{Fermi}} = -\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(n(\epsilon)\frac{\langle\Delta W\rangle}{\langle\Delta t_{\mathrm{uml}}\rangle}\right). \tag{6.2}
$$

Da Fermibeschleunigung und Synchrotron-Prozesse vollkommen unabhängig sind, lassen sich die zeitlichen Änderungen infolge dieser Mechanismen einfach linear addieren. Aus den Gleichungen (4.16), (4.18) und (6.2) ergeben sich daher für die kinetischen Gleichungen mit Elektronenbeschleunigung

$$
\frac{\partial W(\omega)}{\partial t} = \int d\epsilon \bar{P}(\epsilon,\omega)\left\{f(\epsilon)+\frac{\pi^2c^3}{\omega^2}\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right)W(\omega)\right\} \tag{6.3}
$$

$$
\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\int d\omega \bar{P}(\epsilon,\omega)\left\{f(\epsilon)+\frac{\pi^2c^3}{\omega^2}\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right)W(\omega)\right\}\right) - \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(f(\epsilon)\frac{\langle\Delta W\rangle}{\langle\Delta t\rangle}\right). \tag{6.4}
$$

Eine mögliche weitere Verallgemeinerung besteht nun darin, die Ortsabhängigkeit der Verteilungsfunktionen zu berücksichtigen. Dazu sei ein beliebiger, aber fester Punkt $\vec{x}$ und ein bestimmter (im folgenden nicht explizit als Argument aufgeführter) Raumwinkel Ω betrachtet. Das Plasma habe von $\vec{x}$ aus in Richtung $\vec{\Omega}$ die Länge s. Dementsprechend sei $\vec{x}$ mit dieser Ausdehnung s identifiziert. Dann gilt für die Intensität $I_\nu(s,t)$ in $\vec{x}$ zum Zeitpunkt t mit der Anfangsintensität $I_{\nu,0} \equiv I_\nu\left(0,t-\frac{s}{c}\right)$ und der spektralen Energie u_ν pro Raumwinkel die Beziehung

$$
\begin{aligned}
I_\nu(s,t) &= I_\nu\left(0,t-\frac{s}{c}\right)+\int_0^s ds'\frac{dI}{ds'}\left(s',t-\frac{s-s'}{c}\right) \overset{(*)}{=} I_{\nu,0}+\int_0^s ds'\frac{cdu_\nu}{cdt}\left(s',t-\frac{s-s'}{c}\right) \\
&= I_{\nu,0}+\int_0^s ds'\frac{du_\nu}{dt}\left(s',t-\frac{s-s'}{c}\right).
\end{aligned}
$$

Bei der Umformung $(*)$ wurde ausgenutzt, daß die Intensitätsänderung infolge irgend eines physikalischen Prozesses in s' am Ort $\vec{x}$ genau dann zum Zeitpunkt t beobachtet wird, wenn sie zum Zeitpunkt $t' = t-\frac{s-s'}{c}$ erfolgte. Das bedeutet aber, daß für die Intensität in $\vec{x}$ zum Zeitpunkt t das Intervall ds' genau während eines Zeitintervalls $dt' = \frac{1}{c}ds'$ relevant ist, woraus die Umformung folgt.

Speziell für den zeitunabhängigen Fall ergibt sich mittels Differentiation nach s somit die Beziehung

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{du_\nu}{dt}. \tag{6.5}$$

Andererseits gilt gemäß der Strahlungstransportgleichung $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu$. Für den Fall isotroper Verteilungen kann man somit aus den Gleichungen (6.3) und (6.5) mit Hilfe der Beziehung $\frac{I_\nu}{c} = u_\nu = \frac{d\omega}{d\nu}\frac{1}{4\pi}W(\omega) = \frac{1}{2}W(\omega)$ sofort die Emissivität j_ν und den Absorptionskoeffizienten α_ν ablesen:

$$j_\nu = \frac{1}{2}\int d\epsilon \bar{P}(\omega) f(\epsilon) = \frac{1}{2}\int d\epsilon \bar{P}(2\pi\nu) f(\epsilon) \tag{6.6}$$

$$\alpha_\nu = -\int d\epsilon \bar{P}(\omega)\frac{\pi^2 c^2}{\omega^2}\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right) = -\int d\epsilon \bar{P}(2\pi\nu)\frac{c^2}{4\nu^2}\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right). \tag{6.7}$$

Vor dem Hintergrund von Gleichung (6.5) wird noch klar, warum in Abschnitt 4.2 Lösungen der kinetischen Gleichungen für ein optisch dickes Plasma gefunden wurden: Dort wurde die Zeitableitung gleich Null gesetzt, was bedeutet, daß die räumliche Intensitätsableitung verschwindet. Dies ist aber gerade das Kriterium für ein optisch dickes Plasma.

6.2 Lösungen ohne Selbstabsorption

In Abschnitt 6.1 wurde in Form von Gleichung (6.4) die zeitliche Änderung der Elektronenverteilung unter Berücksichtigung der Synchrotronstrahlung, der Synchrotronselbstabsorption und der Fermibeschleunigung angegeben. Im folgenden sei nun die Selbstabsorption vernachlässigt. Zudem sei angenommen, daß eine Injektionsrate $Q_{\rm inj}(\epsilon,t)$ und eine Entweichrate $Q_{\rm esc}(\epsilon,t)$ vorliegen, die beide als nichtnegative Funktionen definiert seien. Dann gilt für die Elektronenverteilung die Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\int d\omega \overline{P}(\epsilon,\omega) f(\epsilon)\right) - \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(f(\epsilon)\frac{\langle\Delta W\rangle}{\langle\Delta t\rangle}\right) + Q_{\rm inj}(\epsilon,t) - Q_{\rm entw}(\epsilon,t). \tag{6.8}$$

Das Integral über $\overline{P}(\epsilon,\omega)$ entspricht hierbei offensichtlich der gesamten Strahlungsleistung $\overline{P}(\epsilon)$, für die man aus Gleichung (2.38) $\overline{P}(\epsilon) = \overline{P}_0\epsilon^2$ mit $\overline{P}_0 = \frac{2}{3}r_0^2 c\langle\beta_\perp^2\rangle B^2\left(\frac{1}{mc^2}\right)^2$ erhält. Die Beschleunigungsrate sei dagegen in der Form $\frac{\langle\Delta W\rangle}{\langle\Delta t\rangle} \equiv a\epsilon$ geschrieben. Die Entweichrate schließlich entspricht der pro Umlauf im Downstream-Bereich entweichenden Teilchen dividiert durch die mittlere Umlaufdauer, so daß sie sich schreiben läßt als $Q_{\rm esc}(\epsilon,t) = \frac{P_{\rm esc} f(\epsilon,t)}{\langle\Delta t_{\rm uml}\rangle} \equiv df(\epsilon,t)$.[1] Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß a und d Konstanten darstellen. Führt man noch die Notationen $x \equiv t$, $y \equiv \epsilon$ und $b \equiv -\overline{P}_0$ ein, ergibt sich in diesem Fall somit insgesamt die Gleichung (Rieger 1997)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (by^2 + ay)\frac{\partial f}{\partial y} = -(2by + a + d)f + Q_{\rm inj}. \tag{6.9}$$

[1] Im nichtrelativistischen Grenzfall ergeben sich (unter den Annahmen, daß die Elektronenenergie praktisch der im Ruhesystem des Upstream-Plasmas entspricht und daß eine isotrope Elektronenverteilung vorliegt) aus den Formeln (5.24), (5.52) und (5.50) für a und d die Beziehungen $a = \frac{4v\Delta U}{3c^2}\left(\frac{4}{v}\left(\frac{\langle\kappa_1\rangle}{|u_1|} + \frac{\langle\kappa_2\rangle}{|u_2|}\right)\right)^{-1}$ bzw. $d = \frac{4|u_2|}{v}\left(\frac{4}{v}\left(\frac{\langle\kappa_1\rangle}{|u_1|} + \frac{\langle\kappa_2\rangle}{|u_2|}\right)\right)^{-1}$. Man beachte ferner, daß im relativistischen Grenzfall $v \approx c$ gilt und somit der mittlere Energiegewinn gemäß Formel (5.24) proportional zur Energie ist.

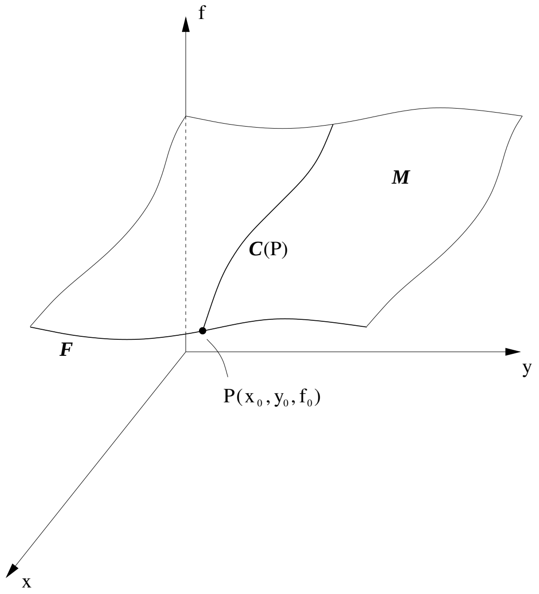

Abbildung 6.1: Lösungsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ der quasilinearen Gleichung. $\mathcal{M}$ setzt sich zusammen aus den Lösungen $\mathcal{C}(\mathrm{P})$ der charakteristischen Gleichungen, die die Punkte P der Kurve $\mathcal{F}$ für ein konstantes $x \equiv x_0$ enthalten.

Man erhält demnach eine quasilineare Gleichung. Jede ihrer Lösungen stellt offenbar eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im dreidimensionalen (x,y,f)-Raum dar, wobei eine Kurve $f(x_0, y)$ mit festem x_0 in genau einer Lösungsmannigfaltigkeit vollständig liegt. (Das besagt gerade, daß die Lösung der quasilinearen Gleichung durch die Energieabhängigkeit der Elektronenverteilung zu einem festen Zeitpunkt eindeutig gegeben ist.) Das System

$$\frac{dx(s)}{ds} = 1\ ,\ \frac{dy(s)}{ds} = by^2 + ay\ ,\ \frac{df(s)}{ds} = -(2by + a + d)f + Q_{\mathrm{inj}}(y(s), x(s)) \tag{6.10}$$

der zu Gleichung (6.9) gehörenden charakteristischen Gleichungen zeichnet sich nun dadurch aus, daß jede seiner Lösungen vollständig in einer Lösungsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ liegt (Bronstein 1991, Kamke 1965). Wie Abbildung (6.1) verdeutlicht, bedeutet dies aber, daß man eine Lösungsmannigfaltigkeit der quasilinearen Gleichung konstruieren kann, indem man zu jedem Punkt P der Kurve $\mathcal{F} \equiv \{(x_0, y, f(x_0, y))|y \in R\}$ die durch P verlaufende Lösung $\mathcal{C}(\mathrm{P})$ des Systems (6.10) bestimmt. Dazu sei zunächst die allgemeine Lösung dieses Systems berechnet: Die Lösung der ersten Gleichung lautet trivialerweise

$$x = x_0 + s. \tag{6.11}$$

Die zweite Gleichung überführt man mittels der Substitution $\tilde{y} = y^{-1}$ in eine lineare Differentialgleichung (Bronstein 1991), und man erhält

$$y = \left(\left(\frac{1}{y_0} + \frac{b}{a} \right) e^{-as} - \frac{b}{a} \right)^{-1}. \tag{6.12}$$

Die dritte Gleichung schließlich stellt eine inhomogene lineare Differentialgleichung dar. Als Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ergibt sich mit den Definitionen

$$K = \frac{1}{y_0} + \frac{b}{a} \ , \ C = \frac{b}{a} \tag{6.13}$$

und einer beliebigen Konstanten $\tilde{K}$

$$f(s) = \tilde{K} e^{-(a+d)s} (K - Ce^{as})^2. \tag{6.14}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmt man hieraus mittels Variation der Konstanten. Dazu sei angenommen, daß die Injektion der Elektronen monoenergetisch mit einer zeitunabhängigen Energie $\epsilon_{\rm inj} \equiv y_{\rm inj}$ erfolgt. In diesem Fall ist die Injektionsrate von der Form $Q_{\rm inj}(\epsilon, t) = Q(t)\delta(\epsilon - \epsilon_{\rm inj})$ bzw. $Q_{\rm inj}(y, x) = Q(x)\delta(y - y_{\rm inj})$. Zusammen mit der Funktion

$$g(s) \equiv \frac{1}{aK} e^{ds} Q(s + x_0) \tag{6.15}$$

ergibt sich dann für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} f(s) &= \left(\tilde{K}(0) + g\left(-\frac{1}{a}\ln\left[\frac{1}{K}\left(C + \frac{1}{y_{\rm inj}}\right)\right]\right)\right)\Theta\left(\frac{1}{Ke^{-as} - C} - y_{\rm inj}\right)\Theta\left(y_{\rm inj} - \frac{1}{K - C}\right)\cdot \\ &\qquad \cdot e^{-(a+d)s}(K - Ce^{as})^2, \end{aligned}$$

wobei Θ die Heaviside-Funktion darstellt. Als physikalische Randbedingung sei nun vorausgesetzt, daß die Elektronenverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ identisch verschwindet. Im (x,y,f)-Raum entspricht diese Randbedingung gerade der durch

$$\mathcal{F} \equiv \{(0, t, 0) \mid t \in R\} \tag{6.16}$$

gegebenen Kurve $\mathcal{F}$. Um die entsprechende Lösung der quasilinearen Gleichung zu erhalten, muß man gemäß der oben durchgeführten Diskussion $f(s)$ für alle Punkte aus $\mathcal{F}$, d. h. für alle Anfangswerte $x_0 = 0$, $y_0 = t$, $f_0 = 0$ berechnen. Aus $f_0 = 0$ kann man dabei zunächst $\tilde{K}(0)$ bestimmen, und man erhält in Form von

$$\begin{aligned} f(s,t) &= g\left(-\frac{1}{a}\ln\left[\frac{1}{K}\left(C + \frac{1}{y_{\rm inj}}\right)\right]\right) e^{-(a+d)s}(K - Ce^{as})^2 \cdot \\ &\qquad \cdot\Theta\left(y_{\rm inj} - \frac{1}{K - C}\right)\left\{\Theta\left(\frac{1}{Ke^{-as} - C} - y_{\rm inj}\right) - \Theta\left(\frac{1}{K - C} - y_{\rm inj}\right)\right\} \end{aligned}$$

die gesuchte Lösungsmannigfaltigkeit als Parametrisierung mit den Parametern s und (da K von y_0 abhängt) t. Aus Gleichung (6.11) ergibt sich mit $x_0 = 0$ unmittelbar $x = s$. Aus Gleichung (6.12) zusammen mit $x = s$ und $y_0 = t$ folgt noch die Beziehung

$$y = \left(\left(\frac{1}{t} + \frac{b}{a}\right) e^{-ax} - \frac{b}{a}\right)^{-1}, \tag{6.17}$$

die sich leicht nach t auflösen läßt. Setzt man den so gefundenen Ausdruck $t = t(x, y)$ mit $s = x$ in die Gleichung für $f(s, t)$ ein und beachtet man, daß bei Beschränkung auf nichtnegative Zeiten und somit x der Faktor $\Theta\left(y_{\rm inj} - \frac{1}{K-C}\right)$ überflüssig ist, ergibt sich

$$f(x,y) = g\left(x - \frac{1}{a}\ln\frac{\frac{1}{y_{\rm inj}} + C}{\frac{1}{y} + C}\right)\frac{1}{y^2}e^{ax}e^{-dx}\left\{\Theta(y - y_{\rm inj}) - \Theta\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{y} + C\right)e^{ax} - C} - y_{\rm inj}\right)\right\}.$$

Geht man nun wieder zu den ursprünglichen Koordinaten $t(=x)$ und $\epsilon(=y)$ über, so erhält man zusammen mit der Gleichung (6.15) mit $s+x_0=x$ und $C=\frac{b}{a}$ die gesuchte Verteilungsfunktion (vgl. Kirk 1997)

$$\begin{aligned} f(\epsilon,t) &= \frac{1}{a}Q\left(t-\frac{1}{a}\ln\frac{\frac{1}{\epsilon_{\rm inj}}+\frac{b}{a}}{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}\right)\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}\left(\frac{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}{\frac{1}{\epsilon_{\rm inj}}+\frac{b}{a}}\right)^{\frac{d}{a}}\cdot \\ &\cdot\left\{\Theta(\epsilon-\epsilon_{\rm inj})-\Theta\left(\left(\frac{1}{\epsilon_{\rm inj}}+\frac{b}{a}\right)e^{-at}-\left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}\right)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Hierbei sind a, b und d gemäß der obigen Definitionen gegeben durch $a=\frac{1}{\epsilon}\frac{\langle\Delta W\rangle}{\langle\Delta t\rangle}$, $b=-\overline{P}_0$ und $d=\frac{P_{\rm esc}}{\langle\Delta t_{\rm uml}\rangle}$. Bezüglich der so erhaltenen Lösung sind noch zwei Anmerkungen zu machen: Zum einen ist sie für $\epsilon_{\rm inj}<-\frac{a}{b}$ nur für $\epsilon<-\frac{a}{b}$ sinnvoll definiert. Physikalisch ist dies damit zu begründen, daß $-\frac{a}{b}$ die Energie darstellt, ab der die Strahlungsverluste über die Fermibeschleunigung dominieren und somit keine Beschleunigung zu höheren Energien mehr möglich ist. Zum anderen impliziert das Verschwinden der Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt $t=0$, daß zu negativen Zeiten keine Elektronen vorlagen. Daher muß die Injektionsrate für negative Zeiten identisch verschwinden; anderenfalls sind für $t<0$ negative (also unphysikalische) Lösungen zu erwarten. Wählt man nun speziell eine zeitunabhängige Injektionsrate, $Q(t)\equiv Q_0$, erhält man für unendlich große Zeiten die Verteilungsfunktion

$$(6.18)\quad f(\epsilon,t)=\frac{1}{a}Q\left(t-\frac{1}{a}\ln\frac{\frac{1}{\epsilon_{\rm inj}}+\frac{b}{a}}{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}\right)\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}\left(\frac{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}{\frac{1}{\epsilon_{\rm inj}}+\frac{b}{a}}\right)^{\frac{d}{a}}\left\{\Theta(\epsilon-\epsilon_{\rm inj})\Theta\left(\frac{a}{|b|}-\epsilon\right)\right\}.$$

Wählt man dagegen für den Zeitanteil der Injektionsrate die Deltafunktion, d. h. setzt man $Q(t)=\delta(t-t_{\rm inj})$ mit einem beliebigen Injektionszeitpunkt $t_{\rm inj}$, so ergibt sich für die Elektronenverteilung die Funktion

$$\begin{aligned} f_{\rm G}(\epsilon,t,\epsilon_{\rm inj},t_{\rm inj}) &= \frac{1}{a}\delta\left(t-t_{\rm inj}-\frac{1}{a}\ln\frac{\frac{1}{\epsilon_{\rm inj}}+\frac{b}{a}}{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}\right)\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}\left(\frac{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}}{\frac{1}{\epsilon_{\rm inj}}+\frac{b}{a}}\right)^{\frac{d}{a}}\cdot \\ &\cdot\left\{\Theta(\epsilon-\epsilon_{\rm inj})-\Theta\left(\left(\frac{1}{\epsilon_{\rm inj}}+\frac{b}{a}\right)e^{-at}-\left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{a}\right)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Da $f_{\rm G}(\epsilon,t,\epsilon_{\rm inj},t_{\rm inj})$ die Lösung für $Q_{\rm inj}(\epsilon,t)=\delta(\epsilon-\epsilon_{\rm inj})\delta(t-t_{\rm inj})$ darstellt und sich die Ausgangsgleichung (6.9) in der Form $Df=Q_{\rm inj}$ mit einem in f linearen Operator D schreiben läßt, handelt es sich bei $f_{\rm G}$ nach Konstruktion gerade um die Greensche Funktion. Damit aber läßt sich die Verteilungsfunktion für eine beliebige Injektionsrate $Q_{\rm inj}$ allgemein als

$$(6.19)\qquad f(\epsilon,t)=\int d\epsilon' dt' Q_{\rm inj}(\epsilon',t')f_{\rm G}(\epsilon,t,\epsilon',t')$$

angeben.

6.3 Bestimmung des Magnetfeldes mittels der Selbstabsorption

Die Form des von einem Plasma emittierten Spektrums hängt offensichtlich entscheidend davon ab, ob das Plasma optisch dünn oder dick ist. Da man andererseits für den Übergang zwischen diesen beiden Fällen mit dem von der Frequenz und der magnetischen Feldstärke abhängigen Absorptionskoeffizienten $\alpha_\nu(\nu, B)$ und der Ausdehnung L des Plasmas längs der Sichtlinie die Bedingung $\alpha_\nu(\nu, B)L \approx 1$ angeben kann, liegt es nahe, daß für die Turnover-Frequenz ν_{T}, bei der das Photonenspektrum von der optisch dicken zur optisch dünnen Form übergeht, die Beziehung[2]

$$\alpha_\nu(\nu_{\mathrm{T}}, B)L = 1 \tag{6.20}$$

gilt, die sich nach B auflösen läßt. Auf diese Weise erhält man aus der Turnover-Frequenz und der Ausdehnung des Plasmas die magnetische Feldstärke. Da bei dieser Rechnung die Elektronenverteilung explizit eingeht, liegt es nahe, zu untersuchen, inwieweit sich deren Änderung infolge der Selbstabsorption auf die Magnetfeldberechnung auswirkt. Dazu sei zunächst der Absorptionskoeffizient α_ν unter der Annahme bestimmt, daß das Elektronenspektrum aus N Abschnitten der Form eines Potenzspektrums besteht und somit als

$$f(\epsilon) = \sum_{i=1}^{N} A_i \epsilon^{p_i} \Theta(\epsilon - a_i)\Theta(b_i - \epsilon) \tag{6.21}$$

geschrieben werden kann. Dann erhält man aus den Gleichungen (6.7), (4.20) und (2.48) mit der Definition $\alpha_0 \equiv \frac{\sqrt{3}q^3 B}{8\pi m}$

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= -\int d\epsilon \bar{P}(\epsilon, \omega) \frac{c^2}{4\nu^2}\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right) = -\frac{\sqrt{3}q^3 B}{8\pi m \nu^2}\int d\epsilon Q(\tilde{x})F(\tilde{x})\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right) \\
&= \frac{\alpha_0}{\nu^2}\int d\epsilon \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(Q(\tilde{x})F(\tilde{x})\epsilon^2\right)\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung aus einer partiellen Integration folgt. Gemäß Gleichung (4.19) kann man nun $\tilde{x}$ mit der Definition

$$R \equiv \frac{3qB}{4\pi m^3 c^5} \tag{6.22}$$

ausdrücken durch

$$\tilde{x} = \frac{\nu}{R\epsilon^2}. \tag{6.23}$$

Ferner seien $Q(\tilde{x})$ durch $Q(\tilde{x}) \approx \sum_{n=0}^{3} Q_n \tilde{x}^n$ mit den Q_n aus Näherung (4.21) und $F(\tilde{x})$ durch $F(\tilde{x}) \approx F_0 \tilde{x}^\phi e^{-\tilde{x}}$ (mit $F_0 = 1.8$ und $\phi = 0.3$) approximiert. In diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= -\frac{\alpha_0}{\nu^2}\int d\tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\sum_{n=0}^{3} Q_n \tilde{x}^n F_0 \tilde{x}^\phi e^{-\tilde{x}}\frac{\nu}{R\tilde{x}}\right)\frac{f\left(\sqrt{\frac{\nu}{R\tilde{x}}}\right)}{\frac{\nu}{R\tilde{x}}} \\
&= -\sum_{n=0}^{3}\frac{\alpha_0}{\nu^2}F_0 Q_n \sum_{i=1}^{N}\int_{\tilde{x}(b_i)}^{\tilde{x}(a_i)} d\tilde{x}\left((n+\phi-1)\tilde{x}^{n+\phi-2}e^{-\tilde{x}} - \tilde{x}^{n+\phi-1}e^{-\tilde{x}}\right)\tilde{x}A_i\left(\frac{\nu}{R\tilde{x}}\right)^{\frac{p_i}{2}} \\
&= -\sum_{n=0}^{3}\sum_{i=1}^{N}\alpha_0 F_0 Q_n A_i R^{-\frac{p_i}{2}}\nu^{\frac{p_i}{2}-2}\,.
\end{aligned}$$

[2] Gleichung (6.20) ist im allgemeinen zwar größenordnungsmäßig, nicht aber exakt gültig. Vgl. hierzu Pacholczyk (1970).

$$\cdot \left\{ (n+\phi-1) \int_{\tilde{x}(b_i)}^{\tilde{x}(a_i)} d\tilde{x}\, \tilde{x}^{n+\phi-\frac{p_i}{2}-1} e^{-\tilde{x}} - \int_{\tilde{x}(b_i)}^{\tilde{x}(a_i)} d\tilde{x}\, \tilde{x}^{n+\phi-\frac{p_i}{2}} e^{-\tilde{x}} \right\}$$

$$= \quad -\sum_{n=0}^{3} \sum_{i=1}^{N} \alpha_0 F_0 Q_n A_i R^{-\frac{p_i}{2}} \nu^{\frac{p_i}{2}-2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ (n+\phi-1) \Gamma_{\tilde{x}(b_i)}^{\tilde{x}(a_i)} \left(n+\phi-\frac{p_i}{2}\right) - \Gamma_{\tilde{x}(b_i)}^{\tilde{x}(a_i)} \left(n+\phi+\frac{p_i}{2}+1\right) \right\}.$$

Das Symbol $\Gamma_{x_1}^{x_2}$ bezeichnet dabei die unvollständige Gammafunktion, $\Gamma_{x_1}^{x_2}(z) \equiv \int_{x_1}^{x_2} x^{z-1} e^{-x} dx$. Für $N=1$, d. h. ein reines Potenzspektrum benötigt man die Näherung für $F(\tilde{x})$ nicht. Ohne sie erhält man völlig analog zur obigen Rechnung (aber ohne die partielle Integration (vgl. Rybicki 1979))

$$\alpha_\nu = \sum_{n=0}^{3} \alpha_0 Q_n A_1 R^{-\frac{p_1}{2}} \nu^{\frac{p_1}{2}-2} \left(1-\frac{p_1}{2}\right) \frac{2^{n-\frac{p_1}{2}}}{n+1-\frac{p_1}{2}} \Gamma\left(\frac{6n+22-3p}{12}\right) \Gamma\left(\frac{6n+2-3p}{12}\right).$$

Da nun (im Gegensatz zum optisch dünnen) im optisch dicken Bereich das Elektronen- nicht aus dem Photonenspektrum erschlossen werden kann, ist für die Berechnung des Absorptionskoeffizienten eine Modellannahme bezüglich der Elektronen erforderlich. Als einfachste, im folgenden mit „a" bezeichnete Variante kommt ein durchgehendes Potenzspektrum $f(\epsilon) = A_1 \epsilon^{p_1}$ in Betracht. Andererseits ist aufgrund der in Abschnitt 4.2 hergeleiteten Lösung für den optisch dicken Fall eher ein Spektrum mit einem Knick bei der der Turnover-Frequenz entsprechenden Elektronenenergie $\epsilon_{\mathrm{T,b}}$ zu erwarten. Diese zweite Variante sei im folgenden „b" genannt. Zwischen $\epsilon_{\mathrm{T,b}}$ und ν_{T} besteht dabei die Beziehung (vgl. Gleichung (2.42) und den Absatz nach Gleichung (2.48))

$$\nu_{\mathrm{T}} = 0.29 \nu_{\mathrm{c}}(\epsilon_{\mathrm{T,b}}) = 0.29 \cdot \frac{3\epsilon_{\mathrm{T,b}}^2 q B_{\mathrm{b}}}{4\pi m^3 c^5} \langle \sin\alpha \rangle = 0.29 R_{\mathrm{b}} \frac{\pi}{4} \epsilon_{\mathrm{T,b}}^2, \tag{6.24}$$

wobei sich die Mittelung über alle Raumwinkel erstreckt. Da der optisch dünne Bereich durch die Beobachtung festgelegt ist, muß für $\epsilon > \epsilon_{\mathrm{T,b}}$ $f_{\mathrm{b}}(\epsilon) = f_{\mathrm{a}}(\epsilon) = A_1 \epsilon^{p_1}$ gelten. Zudem muß in $\epsilon_{\mathrm{T,b}}$ die Stetigkeit gewährleistet sein, woraus $A_2 \epsilon_{\mathrm{T,b}}^{p_2} = A_1 \epsilon_{\mathrm{T,b}}^{p_1}$ und somit $A_2 = A_1 \epsilon_{\mathrm{T,b}}^{p_1-p_2}$ folgt. Insgesamt sind die Spektren für die Varianten a und b also von der Form

$$f_{\mathrm{a}}(\epsilon) = A_1 \epsilon^{p_1} \quad , \quad f_{\mathrm{b}}(\epsilon) = \begin{cases} A_2 \epsilon^{p_2} = A_1 \epsilon_{\mathrm{T,b}}^{p_1-p_2} \epsilon^{p_2} & , \quad 0 \le \epsilon < \epsilon_{\mathrm{T,b}} \\ A_1 \epsilon^{p_1} & , \quad \epsilon_{\mathrm{T,b}} \le \epsilon < \infty \end{cases}. \tag{6.25}$$

Es soll nun untersucht werden, inwieweit sich die unter den verschiedenen Modellannahmen berechneten Feldstärken B_{a} und B_{b} unterscheiden. Dazu seien zunächst als Abkürzung die Funktionen

$$g(p, n, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \equiv -F_0 Q_n \left\{ (n+\phi-1) \Gamma_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \left(n+\phi-\frac{p}{2}\right) - \Gamma_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \left(n+\phi-\frac{p}{2}+1\right) \right\} \tag{6.26}$$

$$h(p, n) \equiv Q_n \left(1-\frac{p}{2}\right) \frac{2^{n-\frac{p}{2}}}{n+1-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{6n+22-3p}{12}\right) \Gamma\left(\frac{6n+2-3p}{12}\right) \tag{6.27}$$

eingeführt. Mit ihnen läßt sich das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten $\alpha_{\nu,\mathrm{a}}$ (mit B_{a}) und $\alpha_{\nu,\mathrm{b}}$ (mit B_{b}) schreiben als

$$\frac{\alpha_{\nu,\mathrm{b}}}{\alpha_{\nu,\mathrm{a}}} = \frac{\sum_{n=0}^{3} \left\{ \alpha_{0,\mathrm{b}} A_1 R_{\mathrm{b}}^{-\frac{p_1}{2}} \nu^{\frac{p_1}{2}-2} g(p_1, n, 0, \tilde{x}_{\mathrm{T,b}}) + \alpha_{0,\mathrm{b}} A_2 R_{\mathrm{b}}^{-\frac{p_2}{2}} \nu^{\frac{p_2}{2}-2} g(p_2, n, \tilde{x}_{\mathrm{T,b}}, \infty) \right\}}{\sum_{n=0}^{3} \alpha_{0,\mathrm{a}} A_1 R_{\mathrm{a}}^{-\frac{p_1}{2}} \nu^{\frac{p_1}{2}-2} h(p_1, n)},$$

wobei $\tilde{x}_{\rm T,b}$ wegen Beziehung (6.24) durch

$$\tilde{x}_{\rm T,b} = \frac{\nu_{\rm T}}{R_{\rm b}\epsilon_{\rm T,b}^2} = \frac{0.29 R_{\rm b}\frac{\pi}{4}\epsilon_{\rm T,b}^2}{R_{\rm b}\epsilon_{\rm T,b}^2} = \frac{0.29\pi}{4} \tag{6.28}$$

gegeben ist. Die Turnover-Frequenz $\nu_{\rm T}$ zeichnet sich nun gemäß Gleichung (6.20) dadurch aus, daß bei ihr die Absorptionskoeffizienten und die Ausdehnung L des Plasmas längs der Sichtline (zumindest größenordnungsmäßig) die Beziehung $\alpha_{\nu,\rm a}L \approx 1 \approx \alpha_{\nu,\rm b}L$ erfüllen. Daher folgt

$$\begin{aligned} 1 \;=\; \frac{\alpha_{\nu,\rm b}(\nu_{\rm T})}{\alpha_{\nu,\rm a}(\nu_{\rm T})} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} h(p_1,n)} \cdot \sum_{n=0}^{3} \Bigg\{ & \frac{\alpha_{0,\rm b}}{\alpha_{0,\rm a}} \left(\frac{R_{\rm b}}{R_{\rm a}}\right)^{-\frac{p_1}{2}} g(p_1,n,0,\tilde{x}_{\rm T,b}) \\ & + \frac{\alpha_{0,\rm b}}{\alpha_{0,\rm a}} \frac{A_2}{A_1} \frac{R_{\rm b}^{-\frac{p_2}{2}}}{R_{\rm a}^{-\frac{p_1}{2}}} \nu_{\rm T}^{\frac{1}{2}(p_2-p_1)} g(p_2,n,\tilde{x}_{\rm T,b},\infty) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Mit den Definitionen von α_0 und R, $A_2 = A_1\epsilon_{\rm T,b}^{p_1-p_2}$ und $\nu_{\rm T} = 0.29 R_{\rm b}\frac{\pi}{4}\epsilon_{\rm T,b}^2$ erhält man demnach

$$1 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} h(p_1,n)} \cdot \sum_{n=0}^{3} \left(\frac{B_{\rm b}}{B_{\rm a}}\right)^{1-\frac{p_1}{2}} \left\{ g(p_1,n,0,\tilde{x}_{\rm T,b}) + \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}(p_2-p_1)} g(p_2,n,\tilde{x}_{\rm T,b},\infty) \right\}.$$

Setzt man noch $\tilde{x}_{\rm T,b} = \frac{0.29\pi}{4}$ ein, ergibt sich insgesamt für $b \equiv B_{\rm b}/B_{\rm a}$

$$b = \left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{3} h(p_1,n)} \cdot \sum_{n=0}^{3} \left\{ g\left(p_1,n,0,\tfrac{0.29}{4}\pi\right) + \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}(p_2-p_1)} g\left(p_2,n,\tfrac{0.29}{4}\pi,\infty\right) \right\} \right)^{\frac{2}{p_1-2}}.$$

Gemäß der Lösung für ein stationäres Potenzspektrum aus Abschnitt 4.2 ist hierbei $p_2 = -3$. Für diesen Wert ist in Abbildung (6.2) das Verhältnis b der nach den beiden Modellannahmen berechneten magnetischen Feldstärken als Funktion des Spektralindizes p_1 im optisch dünnen Bereich aufgetragen. Aus der verwendeten Näherung $F(\tilde{x}) \approx 1.8\tilde{x}^{0.3}e^{-\tilde{x}}$ resultieren zum einen die Lage der Nullstelle bei $p_1 = 0.6$ und zum anderen eine geringe Abweichung von $b = 1$ für $p_1 = p_2 = -3$. Speziell für den Spektralindex $p_1 = -2$ für ein Synchrotronspektrum ohne Selbstabsorption und Teilchenbeschleunigung erhält man als Verhältnis der Magnetfeldstärken $b \approx 0.56$.

Nun haben zum einen Elektronen als massebehaftete Teilchen eine Ruheenergie mc^2, und zum anderen gelten die verwendeten Formeln für die Synchrotronstrahlung nur im relativistischen Grenzfall. Es ist daher abweichend von der bisherigen Diskussion eigentlich geboten, eine von Null verschiedene Minimalenergie einzuführen. Dies bedeutet, daß man den Grenzen a_1 (bei Variante a) bzw. a_2 (bei Variante b) einen Wert $\epsilon_0 > 0$ zuweisen muß. Aus den Gleichungen (6.23) und (6.24) ergibt sich dann bezüglich der Variante b

$$\tilde{x}_{\rm b}(a_2,\nu_{\rm T}) = \tilde{x}_{\rm b}(\epsilon_0,\nu_{\rm T}) = \frac{\nu_{\rm T}}{R_{\rm b}\epsilon_0^2} = \frac{0.29\frac{\pi}{4}R_{\rm b}\epsilon_{\rm T,b}^2}{R_{\rm b}\epsilon_0^2} = 0.29\frac{\pi}{4}\left(\frac{\epsilon_{\rm T,b}}{\epsilon_0}\right)^2 \equiv 0.29\frac{\pi}{4}e^2 \tag{6.29}$$

mit dem Verhältnis e der Turnover- und der Minimalenergie. Völlig analog erhält man für Variante a

$$\tilde{x}_{\rm a}(a_1,\nu_{\rm T}) = \tilde{x}_{\rm a}(\epsilon_0,\nu_{\rm T}) = \frac{\nu_{\rm T}}{R_{\rm a}\epsilon_0^2} = \frac{R_{\rm b}}{R_{\rm a}}\frac{\nu_{\rm T}}{R_{\rm b}\epsilon_0^2} = \frac{R_{\rm b}}{R_{\rm a}}\tilde{x}_{\rm b}(\epsilon_0) = \frac{B_{\rm b}}{B_{\rm a}} \cdot 0.29\frac{\pi}{4}e^2, \tag{6.30}$$

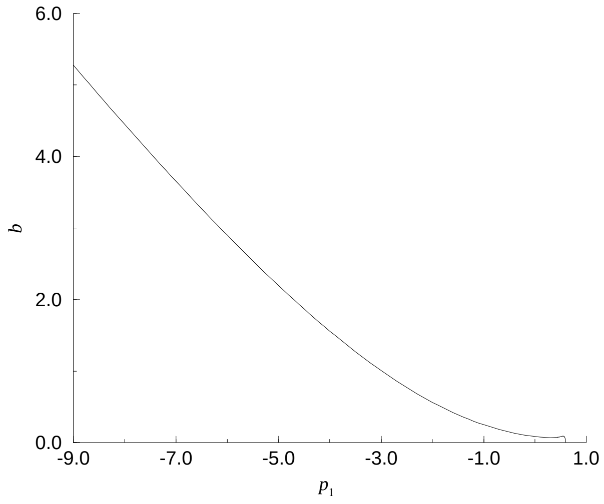

Abbildung 6.2: Das Verhältnis $b = B_\mathrm{b}/B_\mathrm{a}$ mit $p_2 = -3$ als Funktion von p_1.

wobei bei der letzten Umformung Formel (6.22) ausgenutzt wurde. Man macht sich nun leicht klar, daß die oben hergeleitete Beziehung für das Verhältnis b der Magnetfelder auch für eine minimale Energie größer Null richtig bleibt, sofern man die Obergrenze ∞ durch $\tilde{x}_\mathrm{b}(\epsilon_0)$ bzw. $\tilde{x}_\mathrm{a}(\epsilon_0)$ ersetzt. Dies beinhaltet natürlich, daß für Variante a nicht mehr die Funktion h verwendet werden darf (die sich ja auf die Grenzen Null und Unendlich bezieht), sondern auch hier zur Näherung g überzugehen ist. (Dies hat zur Folge, daß sich für $p_1 = p_2$ exakt $b = 1$ ergibt, wie es ja eigentlich zu erwarten ist.) Insgesamt folgt daher

$$\begin{aligned} b &= \left(\frac{\sum_{n=0}^{3} \left\{ g(p_1, n, 0, \frac{0.29}{4}\pi) + \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}(p_2-p_1)} g(p_2, n, \frac{0.29}{4}\pi, \tilde{x}_\mathrm{b}(\epsilon_0)) \right\}}{\sum_{n=0}^{3} g(p_1, n, 0, \tilde{x}_\mathrm{a}(\epsilon_0))} \right)^{\frac{2}{p_1-2}} \\ &= \left(\frac{\sum_{n=0}^{3} \left\{ g(p_1, n, 0, \frac{0.29}{4}\pi) + \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}(p_2-p_1)} g(p_2, n, \frac{0.29}{4}\pi, \frac{0.29}{4}\pi e^2) \right\}}{\sum_{n=0}^{3} g(p_1, n, 0, b \cdot \frac{0.29}{4}\pi e^2)} \right)^{\frac{2}{p_1-2}} . \end{aligned}$$

Man erhält also eine implizite Gleichung für b, die sich numerisch lösen läßt. In Abbildung (6.3) sind für verschiedene Spektralindizes p_1 (wieder bei festem $p_2 = -3$) die sich hieraus ergebenden Werte für das Verhältnis der Magnetfelder als Funktion von e aufgetragen. Offensichtlich verlaufen die Kurven unabhängig von p_1 durch den Punkt (e=1,b=1). Dies folgt unmittelbar daraus, daß für $e = 1$ $\epsilon_0 = \epsilon_{\mathrm{T,b}}$ gilt und somit Variante b in a übergeht. Man ersieht aus der Abbildung, daß die Untergrenze ϵ_0 der Elektronenenergie nur dann relevant ist, wenn ihr Wert größenordnungsmäßig ein Zehntel der Turnover-Energie $\epsilon_{\mathrm{T,b}}$ übersteigt. Anderenfalls entspricht

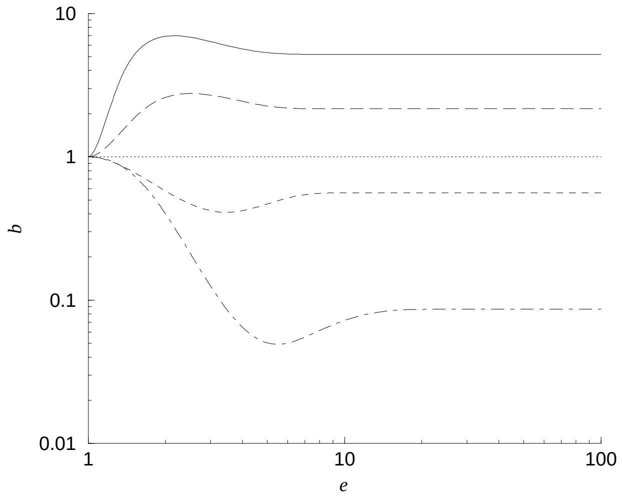

Abbildung 6.3: Das Verhältnis $b = B_\mathrm{b}/B_\mathrm{a}$ mit $p_2 = -3$ als Funktion von $e = \epsilon_{\mathrm{T,b}}/\epsilon_0$ für $p_1 = -9$ (durchgezogene), -5 (langgestrichelte), -3 (punktierte), -2 (gestrichelte) und 0 (strichpunktierte Kurve).

das Verhältnis der Magnetfeldstärken dem für $\epsilon_0 = 0$ (vgl. Abbildung (6.2)).[3]
In Abschnitt 4.2 wurde gezeigt, daß als Elektronenverteilung im optisch dicken Fall nicht nur ein Potenzspektrum, sondern auch die thermische Verteilung möglich ist. Es sei daher im folgenden noch als dritte, mit „c" bezeichnete Variante der Fall betrachtet, daß bis zur Turnover-Energie $\epsilon_{\mathrm{T,c}}$ eine Boltzmann-Verteilung $f(\epsilon) = f_0\epsilon^2 e^{-\beta T}$ (vgl. Gleichung (4.32)) vorliegt, die im optisch dünnen Bereich in ein Potenzspektrum $f(\epsilon) = A_1\epsilon^{p_1}$ übergeht. Fordert man den stetigen Übergang der beiden Teilabschnitte ineinander, erhält man als Anschlußbedingung die Beziehung $f_0\epsilon_{\mathrm{T,c}}^2 e^{-\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} = f(\epsilon_{\mathrm{T,c}}) = A_1\epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1}$. Der Einfachheit halber sei im folgenden stets davon ausgegangen, daß das Elektronenspektrum keine Minimalenergie aufweist (was für ein thermisches Spektrum ja auch gerechtfertigt ist). Insgesamt liegt dann das Spektrum

$$f_\mathrm{c}(\epsilon) = \begin{cases} f_0\epsilon^2 e^{-\beta\epsilon} = A_1 e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}}\epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1-2}\epsilon^2 e^{-\beta\epsilon} & , \quad 0 < \epsilon < \epsilon_{\mathrm{T,c}} \\ A_1\epsilon^{p_1} & , \quad \epsilon_{\mathrm{T,c}} \le \epsilon < \infty \end{cases} \tag{6.31}$$

vor. Die Konstante β läßt sich hierbei als $\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}$ mit der Boltzmann-Konstanten k_B und der Temperatur T interpretieren. Für die durch das thermische Spektrum hervorgerufene Absorption ergibt sich analog der obigen Diskussion (mit $\alpha_{0,\mathrm{c}} = \frac{\sqrt{3}q^3B}{8\pi m}, R_\mathrm{c} = \frac{3qB_\mathrm{c}}{4\pi m^3c^3}$ und $\tilde{x} = \frac{\nu}{R_\mathrm{c}\epsilon^2}$)

$$\begin{aligned} \alpha_\nu^{\mathrm{th}} &= -\int_0^{\epsilon_{\mathrm{T,c}}} d\epsilon\overline{P}(\epsilon,\omega)\frac{c^2}{4\nu^2}\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^2}\right) = -\frac{\alpha_{0,\mathrm{c}}}{\nu^2}\int_0^{\epsilon_{\mathrm{T,c}}} d\epsilon F(\tilde{x})Q(\tilde{x})\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{f_0\epsilon^2e^{-\beta\epsilon}}{\epsilon^2}\right) \\ &= \frac{\alpha_{0,\mathrm{c}}}{\nu^2}\int_{\tilde{x}(\epsilon_{\mathrm{T,c}})}^{\infty} d\tilde{x}F(\tilde{x})Q(\tilde{x})\frac{\nu}{R_\mathrm{c}\tilde{x}}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(f_0e^{-\beta\sqrt{\frac{\nu}{R_\mathrm{c}\tilde{x}}}}\right) \end{aligned}$$

[3]Die Werte von b für $e \longrightarrow \infty$ in Abbildung (6.3) unterscheiden sich geringfügig von den entsprechenden Werten in Abbildung (6.2), da für Variante a die Funktion g anstelle von h verwendet wurde.

$$= \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{2}\alpha_{0,\mathrm{c}} F_0 A_1 R_\mathrm{c}^{-\frac{3}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} \epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1-2} \beta Q_n \int_{\tilde{x}(\epsilon_{\mathrm{T,c}})}^{\infty} d\tilde{x}\, \tilde{x}^{n+\phi-\frac{5}{2}} e^{-\tilde{x}} e^{-\beta\sqrt{\frac{\nu}{R_\mathrm{c}\tilde{x}}}},$$

wobei im letzten Schritt f_0 gemäß Gleichung (6.31) ersetzt wurde. Nun gilt wie in den Beziehungen (6.24) und (6.28) $\nu_\mathrm{T} = 0.29\frac{\pi}{4} R_\mathrm{c} \epsilon_{\mathrm{T,c}}^2$ und $\tilde{x}(\epsilon_{\mathrm{T,c}}) = 0.29\frac{\pi}{4}$. Führt man durch

$$\tilde{g}(u,n) = \frac{1}{2} F_0 Q_n \int_{\frac{0.29}{4}\pi}^{\infty} d\tilde{x}\, \tilde{x}^{n+\phi-\frac{5}{2}} e^{-\tilde{x}} e^{-\sqrt{\frac{0.29}{4}\pi}\, u \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}}}} \tag{6.32}$$

die Funktion $\tilde{g}(u,n)$ ein, erhält man daher speziell für den Fall $\nu = \nu_\mathrm{T}$

$$\alpha_\nu(\nu_\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{3} \alpha_{0,\mathrm{c}} A_1 \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{-\frac{p_1}{2}+1} R_\mathrm{c}^{-\frac{p_1}{2}-\frac{1}{2}} \nu_\mathrm{T}^{\frac{p_1}{2}-\frac{3}{2}} \beta e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} \tilde{g}(\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}, n). \tag{6.33}$$

Um nun die Variante c mit a zu vergleichen, geht man davon aus, daß bei der Turnover-Frequenz der Absorptionskoeffizient für beide Varianten gleich ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 \stackrel{!}{=} & \left(\sum_{n=0}^{3} \alpha_{0,\mathrm{a}} A_1 R_\mathrm{a}^{-\frac{p_1}{2}} \nu_\mathrm{T}^{\frac{p_1}{2}-2} h(p_1,n)\right)^{-1} \sum_{n=0}^{3} \Big\{ \alpha_{0,\mathrm{c}} A_1 R_\mathrm{c}^{-\frac{p_1}{2}} \nu_\mathrm{T}^{\frac{p_1}{2}-2} g\left(p_1, n, 0, \tfrac{0.29}{4}\pi\right) \\
& + \alpha_{0,\mathrm{c}} A_1 \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{-\frac{p_1}{2}+1} R_\mathrm{c}^{-\frac{p_1}{2}-\frac{1}{2}} \nu_\mathrm{T}^{\frac{p_1}{2}-\frac{3}{2}} \beta e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} \tilde{g}(\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}, n) \Big\} \\
= & \frac{\alpha_{0,\mathrm{c}}}{\alpha_{0,\mathrm{a}}} \left(\frac{R_\mathrm{c}}{R_\mathrm{a}}\right)^{-\frac{p_1}{2}} \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} h(p_1,n)} \cdot \\
& \cdot \sum_{n=0}^{3} \left\{ g\left(p_1, n, 0, \tfrac{0.29}{4}\pi\right) + \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{-\frac{p_1}{2}+\frac{3}{2}} \beta\epsilon_{\mathrm{T,c}} e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} \tilde{g}(\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}, n) \right\}.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wude hierbei $\nu_\mathrm{T} = 0.29\frac{\pi}{4} R_\mathrm{c} \epsilon_{\mathrm{T,c}}^2$ verwendet. Aus den Definitionen von $\alpha_{0,\mathrm{a}}$, $\alpha_{0,\mathrm{c}}$, R_a und R_c folgt aber unmittelbar $\frac{\alpha_{0,\mathrm{c}}}{\alpha_{0,\mathrm{a}}} = \frac{R_\mathrm{c}}{R_\mathrm{a}} = \frac{B_\mathrm{c}}{B_\mathrm{a}}$, so daß man für das Verhältnis $b = B_\mathrm{c}/B_\mathrm{a}$ der Magnetfeldstärken

$$b = \left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{3} h(p_1,n)} \cdot \sum_{n=0}^{3} \left\{ g\left(p_1, n, 0, \tfrac{0.29}{4}\pi\right) + \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{-\frac{p_1}{2}+\frac{3}{2}} \beta\epsilon_{\mathrm{T,c}} e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} \tilde{g}(\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}, n) \right\}\right)^{\frac{2}{p_1-2}}$$

erhält. Der Faktor $e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}}$ im so gewonnenen Ausdruck für b führt dazu, daß das Verhältnis von Zähler und Nenner exponentiell anwächst und somit für negative Spektralindizes p_1 wegen $\frac{2}{p_1-2} < 0$ b schnell gegen Null geht. Man ersieht den physikalischen Grund für dieses Verhalten, wenn man die durch

$$N_\mathrm{th} = \int_0^{\epsilon_{\mathrm{T,c}}} f(\epsilon) d\epsilon \tag{6.34}$$

gegebene Gesamtdichte thermischer Elektronen betrachtet. Indem man nun $f(\epsilon)$ aus Gleichung (6.31) einsetzt und das Integral (mittels zweimaliger partieller Integration) explizit berechnet, erhält man für sie den Wert

$$N_\mathrm{th} = A_1 \cdot \left\{ \frac{2}{\beta^3} \epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1-2} e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} - \frac{1}{\beta} \epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1} - \frac{2}{\beta^2} \epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1-1} - \frac{2}{\beta^3} \epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1-2} \right\}. \tag{6.35}$$

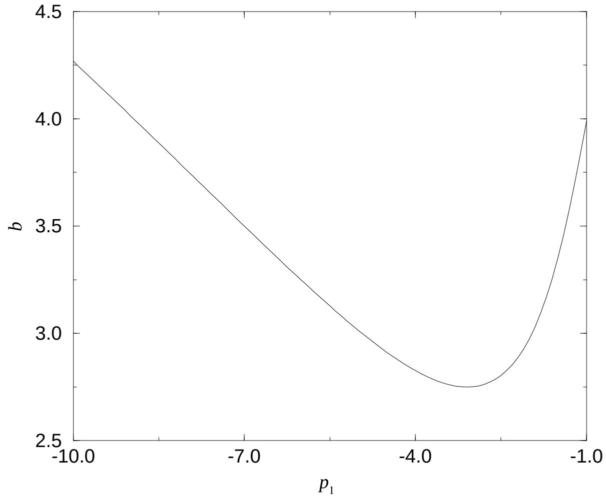

Abbildung 6.4: Das Verhältnis $b = B_\mathrm{c}/B_\mathrm{a}$ für eine minimale Dichte thermischer Elektronen als Funktion von p_1.

Die Dichte bzw. Zahl der thermischen Elektronen und demnach auch die von ihnen hervorgerufene Absorption nehmen also exponentiell mit $\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}$ zu.[4] Nun weisen Polarisationsmessungen bei Jets auf eine geringe Photonendichte im optisch dicken Bereich hin (Jones 1988). Es sei daher im folgenden die Annahme gemacht, daß bezüglich N_th für eine gegebene Temperatur T (d. h. für ein konstantes β) der minimale Wert vorliegt.[5] In diesem Fall muß die Ableitung der thermischen Photonendichte nach der Turnover-Energie verschwinden. Hieraus folgt zusammen mit Beziehung (6.35)

$$
\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} \frac{dN_\mathrm{th}}{d\epsilon_{\mathrm{T,c}}} = A_1 \cdot \Bigg\{ & \frac{2}{\beta^3}(p_1-2)\epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1-3} e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} + \frac{2}{\beta^2}\epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1-2} e^{\beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}} - \frac{1}{\beta} p_1 x^{p_1-1} \\
& - \frac{2}{\beta^2}(p_1-1)\epsilon_{\mathrm{T,c}}^{p_1-2} - \frac{2}{\beta^3}(p_1-2)x^{p_1-3} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Führt man noch die Notation $u \equiv \beta\epsilon_{\mathrm{T,c}}$ ein, so liefert die Division beider Seiten dieser Gleichung durch $A_1 x^{p_1}$

$$
0 = 2(p_1-2)(e^u-1)u^{-3} + 2(e^u-(p_1-1))u^{-2} - p_1 u^{-1}. \tag{6.36}
$$

Die so erhaltene Gleichung besitzt für $p_1 \geq 1$ eine Lösung, die mit $u_\mathrm{min} = u_\mathrm{min}(p_1)$ bezeichnet sei. Dann ergibt sich für das Verhältnis b der magnetischen Feldstärken offensichtlich

$$
b = \left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{3} h(p_1,n)} \cdot \sum_{n=0}^{3} \left\{ g\left(p_1, n, 0, \tfrac{0.29}{4}\pi\right) + \left(\frac{0.29\pi}{4}\right)^{-\frac{p_1}{2}+\frac{3}{2}} u_\mathrm{min} e^{u_\mathrm{min}} \tilde{g}(u_\mathrm{min}, n) \right\} \right)^{\frac{2}{p_1-2}}.
$$

[4] Die exponentielle Zunahme der Absorption folgt strenggenommen nicht unmittelbar aus der der gesamten Teilchenzahl. Entscheidend ist vielmehr, daß die spektrale Elektronendichte für hinreichend von Null verschiedene Energien dieses Verhalten aufweist.

[5] Man könnte natürlich auch umgekehrt die Turnover-Energie festhalten und β variieren. Dies ergäbe jedoch nur ein Minimum für $\beta = 0$, d. h. für eine unendlich hohe Temperatur.

In Abbildung (6.4) ist das auf diese Weise bestimmte Verhältnis b gegen den Spektralindex p_1 aufgetragen. Man beachte hierbei, daß der Punkt $P_1 = -1$ gerade $u_{\rm min} = 0$ entspricht und demnach $\epsilon_{\rm T,c}$ und (bei einer endlichen Magnetfeldstärke) $\nu_{\rm T}$ verschwinden. Insofern ist eine gewisse Vorsicht bei der Verwendung der Auftragung bzw. der zu ihr führenden Argumentation angebracht.
Insgesamt ergibt sich somit, daß das Verhältnis b der magnetischen Feldstärken für ein Elektronenspektrum, das im optisch dünnen Bereich eine andere Form als im optisch dicken Bereich aufweist, und für ein durchgehendes Potenzspektrum im wesentlichen durch $0.1 < b < 10$ abgeschätzt werden kann, wobei beim ersten Fall unerheblich ist, ob im optisch dünnen Bereich ein Potenzspektrum oder ein thermisches Spektrum vorliegt. Die Wahl eines durchgehenden Potenzspektrums ergibt demnach für die Magnetfeldstärke einen Wert, der der tatsächlichen vorliegenden Felstärke zumindest größenordnungsmäßig entspricht.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Einfluß von Synchrotronstrahlung, Synchrotronselbstabsorption und Fermibeschleunigung auf die Elektronen- und die Photonenverteilung in einem vollständig ionisierten Plasma diskutiert. Die hierbei gewonnenen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Die Synchrotronstrahlung einer Ladung im Magnetfeld läßt sich formal als spontane Emission auffassen. Die quantenelektrodynamische Diskussion führt dann zur Rechtfertigung dafür, zur Beschreibung der Synchrotron-Prozesse die Einsteinschen A- und B-Koeffizienten zu verwenden.

2. Man erhält die spektrale Energieverteilung als Energie der monochromatischen Wellen pro Frequenzintervall aus dem Betragsquadrat der fouriertransformierten elektrischen Feldstärke. Mit ihrer Hilfe lassen sich unter Ausnutzung der Einstein-Beziehungen die kinetischen Gleichungen für die Elektronen- und die Photonenverteilung herleiten. Diese Gleichungen stellen ein System gekoppelter Integro-Differentialgleichungen dar (Gleichungen (4.16) und (4.18)).

3. Als stationäre Lösung der gekoppelten kinetischen Gleichungen ergeben sich zum einen die (klassische) thermische Verteilung (d. h. die Boltzmann-Verteilung für die Elektronen bzw. die Wien-Verteilung für die Photonen). Zum anderen sind auch Potenzspektren möglich, wobei der Spektralindex für die Elektronen den Wert -3 und für die Photonen den Wert $\frac{5}{2}$ aufweisen muß. Der zweite Fall entspricht in bezug auf die Photonen gerade der Potenzlösung in einem optisch dicken Medium.
   Die Verwendung der Näherung $P(\epsilon, \omega) \approx P_0(\epsilon)\delta(\omega - \omega_0(\epsilon))$ für die spektrale Leistung bei der Synchrotronemission ist zur Bestimmung näherungsweiser Lösungen der kinetischen Gleichungen nicht problemlos anwendbar.

4. Bei der Fermibeschleunigung an einer ebenen Schockfront, die senkrecht zum Magnetfeld verläuft, lassen sich die Entweichwahrscheinlichkeit und die mittlere Dauer eines Umlaufs als Funktion der Teilchendichte und des Teilchenflusses ausdrücken. Für isotrope relativistische Teilchenverteilungen ist der Energiegewinn pro Umlauf proportional zur Energie des beschleunigten Teilchens.

5. Aus der Lösung der nichtrelativistischen Transportgleichung erhält man die in den Gleichungen (5.50) und (5.52) angeführten Ausdrücke für die Entweichwahrscheinlichkeit bzw. die mittlere Dauer eines Umlaufs.

6. Die kinetischen Gleichungen lassen sich leicht um die Fermibeschleunigung erweitern. Man erhält dann die Gleichungen (6.6) und (6.7) für die Emissivität bzw. den Absorptionskoeffizienten.

7. Bei Vernachlässigung der Selbstabsorption (d. h. im optisch dünnen Fall) läßt sich die Elektronenverteilung unter Berücksichtigung der Synchrotronstrahlung und der Fermibeschleunigung für relativistische Elektronen durch die quasilineare Gleichung (6.9) beschreiben. Nimmt man als Randbedingung an, daß die Verteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ identisch verschwindet, läßt sich die zugehörige Greensche Funktion exakt berechnen, und man erhält die in Formel (6.19) gegebene allgemeine Lösung.

8. Aufgrund der oben erwähnten Potenzlösung für die kinetischen Gleichungen ist zu erwarten, daß sich die Form des Elektronenspektrums im optisch dünnen von der im optisch dicken Bereich unterscheidet. Als Spektren im optisch dicken Bereich wurden in dieser Arbeit ein Potenzspektrum mit Spektralindex -3, das selbe Spektrum mit einer unteren Abschneideenergie und eine Boltzmann-Verteilung untersucht. Bei der Boltzmann-Verteilung wurde dabei eine minimale Teilchendichte angesetzt, wie sie von der Beobachtung gefordert wird. **In allen drei Fällen läßt sich das Verhältnis b der aus dem Knick eines Synchrotronspektrums berechneten Magnetfeldstärken mit und ohne Berücksichtigung der Änderung des Elektronenspektrums im optisch dicken Bereich im wesentlichen durch $0.1 < b < 10$ abschätzen.** Die Annahme eines durchgehenden Potenzspektrums mit konstantem Spektralindex ist somit zwar nicht gerechtfertigt, liefert jedoch Feldstärken, die von der richtigen Größenordnung sind.

Die Anwendbarkeit der Ergebnisse auf astronomische Objekte unterliegt gewissen Einschränkungen:

1. Es wurde bezüglich der Transportgleichung nur der nichtrelativistische Fall diskutiert. Ferner wurde die Orthogonalität der Schockfront zum Magnetfeld vorausgesetzt. Zudem wurde bei der Herleitung der quasilinearen Gleichung (6.9) die Ad-hoc-Annahme gemacht, daß die Funktionen a und d Konstanten darstellen. Hier wäre also eine Verallgemeinerung möglich, um gegebene Schockgeometrien zu berücksichtigen.

2. Bei der Diskussion der Bestimmung der Magnetfeldstärke aus einem Synchrotronspektrum wurde nur das Ruhesystem des Plasmas betrachtet. Beobachtungen von extragalaktischen Synchrotronquellen (Blazaren) haben jedoch eine relativistische Bewegung des Plasmas gezeigt, so daß noch die Transformation zwischen dem Ruhesystem des Plasmas und dem des Beobachters zu berücksichtigen ist. Dies beinhaltet eine erhebliche Unsicherheit in der Bestimmung der Magnetfeldstärke, da der Lorentzfaktor und der Winkel zur Sichtlinie nur sehr ungenau bestimmt werden können.

3. Schließlich beinhaltet die Beschränkung allein auf die Synchrotronstrahlung und die Fermibeschleunigung die Vernachlässigung einer Vielzahl anderer Prozesse (vgl. Mastichiadis 1995).

Auch bei der Berücksichtigung dieser Erweiterungen bleibt jedoch der in dieser Arbeit verwendete Formalismus der kinetischen Gleichungen im wesentlichen gleich bzw. kann analog erweitert werden.

Kapitel 8

Literaturverzeichnis

Achieser A., Berestezki, W. 1962 *Quantenelektrodynamik*, Harri Deutsch, Frankfurt/Main, pp. 284, 316 f.

Baumjohann, W., Treumann R. A. 1996 *Basic Space Plasma Physics*, Imperial College Press, London, pp. 22 ff., 103 ff.

Begelman, M. C. et al. 1984 *Rev. Mod. Phys.* **56**, 255

Bell, A. R. 1978 *MNRAS* **182**, 147

Bregman, J. N. et al. 1990 *ApJ* **352**, 574

Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A. 1991 *Taschenbuch der Mathematik* (25. Auflage) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, pp. 35 ff., 421, 464 ff.)

Douglas, A. M. et al. 1986 in *Black Holes; The Membrane Paradigm*, eds.: Thorne, K. S. et al., Yale University Press, New Haven, pp. 138 ff.

Drury, L. O'C. 1983 *Rep. Prog. Phys.* **46**, 973

Frank J. et al. 1992 *Accretion Power in Astrophysics* (second edition), Cambridge University Press, Cambridge, pp. 179 ff., 220 f.

Gaisser, T. K. 1990 *Cosmic Rays and Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, ch. 11

Ginzburg, V. L., Syrovatskii, S. I. 1965 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **3**, 297

Goenner, H. 1996 *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, p. 113

Hargrave, P. J., Ryle, M. 1974 *MNRAS* **166**, 305

Hasegawa, A., Sato T. 1989 *Space Plasma physics – 1 Stationary Processes*, Springer Verlag, Berlin, pp. 5 ff.

Hoyle, F. 1960 *MNRAS* **120**, 338

Jackson, J. D. 1962 *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, ch. 14, p. 619

Jokipii, J. R. 1973 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **11**, 1

Jones, T. W. 1988 *ApJ* **332**, 678

Kamke, E. 1965 *Differentialgleichungen II* (5. Auflage), Geest & Portig K.-G., Leipzig, pp. 27 f.

Kardashev, N. S. 1962 *Sov. Astron.* **6**, 317

Kirk, J. G. 1994 in *Plasma Astrophysics*, eds.: Kirk, J. G. et al., Springer Verlag, Berlin

Kirk, J. G. et al. 1997 *A&A* in press

Kuijpers, J. 1996 in *Plasma Astrophysics*, eds.: Chiuderi C., Einaudi, G., Springer Verlag, Berlin, pp. 104 ff.

Landau, L. D., Lifshitz E. M. 1962 *The Classical Theory of Fields* (second edition), Pergamon Press, Oxford pp. 136, 197

Longair, M. S. 1981 *High Energy Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, ch. 24

Longair, M. S. 1992 *High Energy Astrophysics* (second edition, volume 1), Cambridge University Press, Cambridge, ch. 11

Longair, M. S. 1994 *High Energy Astrophysics* (second edition, volume 2), Cambridge University Press, Cambridge, ch. 18

Lynden-Bell, D. 1996, *MNRAS* **279**, 389

Makino, F. et al. 1987 *ApJ* **313**, 662

Marscher, A. P., Gear, W. K., *ApJ* **298**, 114

Mastichiadis A., Kirk J. G. 1994 *A&A* **295**, 613

McCray, R. 1969 *ApJ* **156**, 329

Melrose, D. B. 1980 *Plasma Astrophysics (Volume I)*, Gordon and Breach, New York, p. 121

Norman, C. A., ter Haar, D. 1974 *Phys. Rep.* **17**, 307

Pacholczyk, A. G. 1970 *Radio Astrophysics*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, p. 98

Peterson, B. M. 1997 *An Introduction to Active Galactic Nuclei*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 32 ff., 64 f., 107 ff., 113

Rees, M. J. 1981 in *Proc. IAU Symp. 97, Extragalactic Radio Sources*, eds.: Heeschen, D. S., Wade, C. M., Reidel, Dordrecht

Rieger, F. 1997 *Teilchenbeschleunigung und Synchrotronemission in Blazar-Jets*, Diplomarbeit, Ruprecht-Karls-Universität, Heidelberg

Romanova, M. M., Lovelace, R. V. E. 1997 *ApJ* **475**, 97

Rybicki, G. B., Lightman A. P. 1979 *Radiative Processes in Astrophysics*, Wiley, New York

Schwabl, F. 1992 *Quantenmechanik* (3. Auflage), Springer Verlag, Berlin, p. 376

Ulrich, M.-H. et al. 1997 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **35**, 445

Unsöld, A., Baschek, B. 1991 *Der neue Kosmos* (5. Auflage), Springer Verlag, Berlin, p. 344

Veltman, M. 1994 *Diagrammatica*, Cambridge University Press, Cambridge, ch. 3

Weigert, A., Wendker H. J. 1996 *Astronomie und Astrophysik: ein Grundkurs* (3. Auflage), VCH, Weinheim, pp. 250 ff., 295 f.

Westfold, K. C. 1959 *ApJ* **130**, 241

Wolfram, S. 1997 *Das* Mathematica *Buch* (3. Auflage), Addison Wesley Longman Verlag, Bonn

Woltjer, L. 1990 in *Active Galactic Nuclei*, eds.: Blandford et al., Springer Verlag, Berlin, p. 45

Abbildungsverzeichnis

Danksagung

Zuerst möchte ich Herrn Prof. Dr. Klaus Beuermann und meinem Betreuer Dr. Karl Mannheim für die Ermöglichung dieser Arbeit und für ihre stets vorhandene Hilfs- und Gesprächsbereitschaft danken.

Mein Dank gilt aber auch allen anderen Mitgliedern der Abteilung I, an die ich mich immer mit meinen Fragen und Problemen wenden konnte. Namentlich möchte ich vor allem Andreas Fischer, Frank Rieger, Matthias Schreiber als Zimmerkollegen, Boris Gänsicke, Jens Kube und Frederic Hessman nennen.

Zudem bedanke ich mich bei der Studienstiftung des deutschen Volkes, die mich seit dem fünften Semester finanziell und ideell unterstützt hat.

Außerhalb von Universität und Studium danke ich vor allem meinen Eltern, ohne die mein Studium in mehrfacher Hinsicht völlig unmöglich gewesen wäre.

Eine der schönsten Erkenntnisse, die ich im Rahmen meiner Arbeit gewonnen habe, war die, daß etliche Personen in aller Welt ihre Zeit damit verbringen, hervorragende und dennoch kostenlose Programme zu schreiben. Stellvertretend für sie alle möchte ich aus naheliegenden Gründen Donald Knuth und Leslie Lamport, den Urhebern von TeX und LaTeX danken.